Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniera Matemática
23 de Marzo de 2011

Auxiliar N°2 MA2601: Límites y Continuidad

Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Felipe Missene, Avelio Sepúlveda.

P1. Sea $A \subseteq R^n$. Demuestre que:

$$A^c \text{ es abierto} \iff (\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A) x_n \to x \Rightarrow x \in A$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Estudie la continuidad de:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Demuestre que:

$$f \text{ es continua} \iff (\forall A \subseteq R^m \text{ } abierto) f^{-1}(A) \text{ es abierto}$$

P4. Un tópico importante en el cálculo vectorial es el estudio de las funciones lineales. Sea $l : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lineal demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes

(a) l es continua

(b) l es continua en 0

(c) $\|l(x)\| \leq m \|x\|$

(d) l es lipchitz

Demuestre que todas las funciones lineales de espacios vectoriales de dimensión finita son continuas.

P5. Sea $\{x_n\}_{n\in N} \subseteq$ demuestre que:

(a) x_n converge $\iff \forall i \in \{1, \cdots, n\}\, x_{ni}$ converge, donde $\{x_{ni}\}$ es la componente i-ésima dex_n

(b) x_n es acotado $\Rightarrow$ x_n tiene una subsucesión convergente

P6. Usando el problema anterior demuestre que para todo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ f alcanza su máximo y su mínimo.