Auxiliar 12: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Benjamín Palacios - Mauro Escobar
9 de septiembre de 2011

P1. [Cambio de variables]

(a) Se quiere encontrar el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=R^2,$$

con $a,b,c>0$. Para ello, considere $T(x,y,z)=(ax,by,cz)$ y estudie el conjunto $T(B(0,R))$, donde $B(0,R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$.

(b) Calcule

$$\int_{\mathcal{D}} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ dx\ dy$$

donde $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}\leq R\}$. Deduzca el valor de $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\ dx$.

(c) Si R es la región $x^2+xy+y^2\leq 1$, probar que

$$\int_R e^{x^2+xy+y^2}\ dx\ dy=\frac{2\pi(e-1)}{\sqrt{3}}.$$

Hint: Sea $x=u\cos\alpha - v\sin\alpha$ y considere un cambio de variables similar para y, con α elegido de manera conveniente.

(d) Sea $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}x\leq y\leq\sqrt{3}x,\ x,y\geq 0\}$. Calcule

$$\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy.$$

(e) Calcule el volumen de la región acotada por las ecuaciones:

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=2,\qquad z=x^2+y^2.$$

(f) Sean $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, y

$$D_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ -\sqrt{4-x^2-y^2}\leq z\leq 0\},\ D_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\leq z\leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

(i) Encuentre $\iiint_{D_1} f(x,y,z)\ dV$.

(ii) Considere una variante adecuada de las coordenadas esféricas. Describa D_2 en éstas coordenadas y calcule el Jacobiano del cambio de variables.

(iii) Encuentre $\iiint_{D_2} f(x,y,z)\ dV$ y $\iiint_{D} f(x,y,z)\ dV$, con $D=D_1\cup D_2$.

P2. [Teorema de Fubini]

(a) Calcule $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{x+z} dy\ dz\ dx$, y también en el orden $dy\ dx\ dz$.

(b) Calcule $\int\limits_0^2 \int\limits_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^1 e^{x^2}\ dx\ dy$.

P3. [Sumas de Riemann]

Calcule la suma superior e inferior de la función

$$f(x,y) = x \operatorname{sen} y$$

en el dominio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi\}$. Puede ser útil utilizar la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen} jx = \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}.$$

P4. [Multiplicadores de Lagrange]

(a) Minimice la función $f(x,y,z) = xy + z^2$ sujeta a las restricciones

$$y - x = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

(b) Considere la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Encuentre los puntos en que f alcanza sus valores máximo y mínimo (globales) sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) Considere la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$.
Encuentre los puntos en que f alcanza sus valores máximo y mínimo (globales) sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.