Auxiliar 9: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Benjamín Palacios - Mauro Escobar
27 de mayo de 2011

P1. Muestre que $\frac{n!}{n^{n/2}}$ es el máximo valor, en $\mathbb{R}^n$, de la función:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i, \qquad \text{s.a. } \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{i^2} = 1.$$

P2. (i) Encuentre el valor de la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$.

(ii) Una caja rectangular sin tapa debe tener una superficie de $32m^2$. Encuentre las dimensiones de la caja de modo tal que el volumen que encierra sea máximo.

P3. Demuestre la *Desigualdad de Young*, es decir, para todo $x, y \geq 0$ se cumple

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \qquad \text{donde } p \in (1,\infty) \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Deduzca la *Desigualdad de Hölder*, esto es, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p \in (1,\infty)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hint: Considere una función $g : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = xy$ en el conjunto $M_c := \{x, y \geq 0 \ : \ \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q = c\}$ donde $c > 0$ está fijo.

P4. Demuestre la clásica desigualdad

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n),$$

donde $a_i > 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$.

P5. Sea A una matriz de $n \times n$ simétrica con coeficientes reales.

(i) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^t A x$. Verifique que $\nabla f(x) = 2(Ax)^t$.

(ii) Sea v_1 una solución del problema de minimización

$$\min_{\|x\|^2=1} x^t A x.$$

Pruebe que v_1 es vector propio de A.

(iii) Sea v_2 una solución del problema de minimización

$$\min_{\substack{\|x\|^2=1 \\ x\cdot v_1=0}} x^t A x,$$

donde v_1 es el vector de la parte anterior. Pruebe que v_2 es vector propio A.

(iv) Considere v_1, v_2 como en las partes anteriores. Se definen $v_3, \ldots, v_n$ por recurrencia: dados $v_1, \ldots, v_k$ sea v_{k+1} una solución del problema

$$\min_{\substack{\|x\|^2=1 \\ x\cdot v_1=0,\ldots,x\cdot v_k=0}} x^t A x.$$

Demuestre que $v_3, \ldots, v_n$ son vectores propios de A. Deduzca que A es diagonalizable.