AUXILIAR 7: CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: JUAN DÁVILA

AUXILIARES: BENJAMÍN PALACIOS - MAURO ESCOBAR

6 DE MAYO DE 2011

P1. Desarrollos de Taylor

(a) Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) + x^2y.$$

(i) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para f entorno al punto $(0, 0)$.

(ii) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y pruebe que

$$|f(h_1, h_2) - P_2(h_1, h_2)| \leq \frac{40}{3} \|(h_1, h_2)\|^3$$

donde P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f entorno de $(0, 0)$.

(b) Sea $g(x, y) = xy e^{x^2+2y^2}$. Explícite un polinomio de dos variables $T(x, y)$ que cumpla

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) - T(x, y)}{x^4 + y^4} = 0.$$

(c) (i) Sea $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que la matriz $H_h(x) = h''(x)$ es semidefinida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Demuestre que si x_0 es un punto crítico de h , entonces x_0 es un punto de mínimo global para h .

(ii) Utilice la parte (i) para mostrar que para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 2xy - x - y + \frac{3}{4} \geq 0.$$

P2. Condiciones de Optimalidad

(a) Resuelva

$$\min_{x,y>0} \frac{1}{x^2y} + \ln(x) + y^2.$$

Verifique que encontró un mínimo global.

(b) Pruebe que $\forall x, y \geq 0$

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

Hint: maximice $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-y}$ en el primer cuadrante. Para esto, note primero que alcanza su máximo. Luego, encuentre el máximo par $x, y > 0$. Finalmente considere las funciones de una variable $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ y maximícelas para $x > 0$ e $y > 0$, respectivamente.

(c) Analice los puntos críticos de

$$g(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$