MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliares: Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Pauta Control 2

P1.

i) Calcular la razón de cambio de la presión al desplazarnos desde el punto $A = (\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{12}, ln(\rho_0))$ al punto $B = (-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12}, ln(\rho_0))$, equivale a calcular la derivada direccional de la función P en el punto A y la dirección del vector $B - A$ normalizado. Como la función $P \in \mathcal{C}^1$, el calculo de la derivada direccional en punto x_0 y la dirección v está dada por: $DP(x_0, v) = \nabla P(x_0) \cdot v$
Tenemos que $P(x, y, z) = \rho_0(sen^2(2x) + cos^2(3y))e^{-z}$, calculemos las derivadas parciales:
$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) = 4\rho_0 sen(2x)cos(2x)e^{-z}$
$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = -6\rho_0 cos(3y)sen(3y)e^{-z}$
$\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = -\rho_0(sen^2(2x) + cos^2(3y))e^{-z}$
Luego, evaluando en A, $\nabla P(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{12}, ln(\rho_0)) = (2, 3, -1)$**(0,8 ptos)**
Calculemos la dirección $v = \frac{B-A}{\|B-A\|}$:
$B - A = (-\frac{5\pi}{8}.\frac{\pi}{2}, 0)$,
$\|B - A\| = \sqrt{\frac{25\pi^2}{64} + \frac{\pi^2}{4} + 0} = \frac{\sqrt{41}\pi}{8}$
Entonces $v = \frac{1}{\sqrt{41}}(-5, 4, 0)$ **(0,3 ptos)**
Finalmente $DP(A, v) = (2, 3, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{41}}(-5, 4, 0) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-10 + 12 + 0) = \frac{2}{\sqrt{41}}$**(0,4 ptos)**

ii) Por teorema, sabemos que $\nabla P = (2, 3, -1)$ apunta en la dirección en que la función crece más rápidamente, luego $-\nabla P = (-2, -3, 1)$ apunta en la dirección en que la presión disminuye lo más rápidamente posible y es en esa dirección en la cual debemos movernos **(1 pto)**.
Obviamente, para que la presión aumente lo más rápidamente posible debemos ir en la dirección de $\nabla P = (2, 3, -1)$ **(0,5 ptos)**.

iii) Para no apreciar ningún cambio de presión debemos tomar la dirección cuya razón de cambio sea 0, i.e., debemos encontrar v tal que $DP(A, v) = 0$ **(0,7 ptos)**
$DP(A, v) = \nabla P(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{12}, ln(\rho_0)) \cdot (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow 2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$, luego para no apreciar cambios de presión debemos tomar cualquier vector unitario (v_1, v_2, v_3) que satisfaga
$v_3 = 2v_1 + 3v_2$ **(0,8 ptos)**
Por ejemplo $(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$

iv) Componemos: $(P \circ r)(t) = \rho_0(sen^2(t) + cos^2(-3t + 4\pi))$ **(0,5 ptos)**
Derivamos:$\frac{d(P \circ r)(t)}{dt} = \rho_0(2sen(t)cos(t) + 6cos(-3t + 4\pi)sen(-3t + 4\pi))$**(0,5 ptos)**
Evaluamos: $\frac{d(P \circ r)(\pi)}{dt} = \rho_0(2sen(\pi)cos(\pi) + 6cos(\pi)sen(\pi)) = 0$ **(0,5 ptos)**

P2.

a) Calculemos las derivadas parciales de $g(r, \theta) = f(rcos(\theta), rsin(\theta))$
$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}sen(\theta)$
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}cos(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}sin(\theta)\right)cos(\theta) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}cos(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}sin(\theta)\right)sin(\theta)$
$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-rsen(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial \theta}rcos(\theta)$
$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-rsen(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}rcos(\theta)\right)(-rsen(\theta)) - \frac{\partial f}{\partial x}rcos(\theta)$
$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-rsen(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}rcos(\theta)\right)(rcos(\theta)) - \frac{\partial f}{\partial y}rsen(\theta)$
Como $f \in \mathcal{C}^2$, entonces las derivadas cruzadas son iguales: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, **(0,2 ptos)**
agrupando:

$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}cos^2(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}sin^2(\theta) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}cos(\theta)sin(\theta)$
$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}r^2sen^2(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r^2cos^2(\theta) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}r^2sin(\theta)cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}rcos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial y}rsen(\theta)$
Luego:
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}sen^2(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}cos^2(\theta) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}sin(\theta)cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{cos(\theta)}{r} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{sen(\theta)}{r}$
$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{cos(\theta)}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{sen(\theta)}{r}$
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}cos^2(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}sin^2(\theta) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}cos(\theta)sin(\theta)$
Sumando:
$\triangle g = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \triangle f$ **(0,8 ptos)**

b) i) Para hacer el polinomio de Taylor de orden 2, necesitamos que $F \in \mathcal{C}^2$, lo que se cumple, ya que F es suma de funciones $\mathcal{C}^\infty$ **(0,3 ptos)**. Calculemos las derivadas parciales:
$F(x,y) = cos(xy) - x^4y^4$
$\frac{\partial F}{\partial x} = -sen(xy)y - 4x^3y^4$
$\frac{\partial F}{\partial x} = -sen(xy)x - 4x^4y^3$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -cos(xy)y^2 - 12x^2y^4$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = -cos(xy)xy - sen(xy) - 16x^3y^3 = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial yt}$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -cos(xy)x^2 - 12x^4y^2$ **(0,3 ptos)**
Luego,
$F(0,0) = 1$, $\nabla F(0,0) = (0,0)$, $HF(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Luego, el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $P_2(h_1,h_2) = 1$ **(0,4 ptos)**

ii) Para calcular el error, observamos primero que $F \in \mathcal{C}^3$. **(0,3 ptos)** Luego, la fórmula del Error está dada por:
$R_2(x_0,h) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_0 + t_{ijk}h)h_ih_jh_k$, con $t_{ijk} \in [0,1]$
Considerando $x_0 = (0,0)$:
$R_2(x_0,h) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(t_{ijk}h)h_ih_jh_k$, con $t_{ijk} \in [0,1]$
Luego, el problema consiste en encontrar una vecindad a $(0,0)$ tal que $|R_2(x_0,h)| \leq 10^{-14}$
$|R_2(x_0,h)| \leq \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\sum_{k=1}^2 |\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(t_{ijk}h)||h_i||h_j||h_k|$, con $t_{ijk} \in [0,1]$
Calculemos las derivadas de tercer orden:
$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = sen(xy)y^3 - 24xy^4$
$\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial x^2} = sen(xy)xy^2 - 2cos(xy)y - 48x^2y^3 = \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}$
$\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2} = sen(xy)x^2y - 2cos(xy)x - 48x^3y^2 = \frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}$
$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = sen(xy)x^3 - 24x^4y$ **(0,7 pto)**
Luego:
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(x,y)| = |sen(xy)y^3 - 24xy^4| \leq |sen(xy)||y^3| + 24|x||y^4|$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial x^2}(x,y)| = |sen(xy)xy^2 - 2cos(xy)y - 48x^2y^3| \leq$
$|sen(xy)||x||y^2| + 2|cos(xy)||y| + 48|x^2||y^3|$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}(x,y)| = |sen(xy)x^2y - 2cos(xy)x - 48x^3y^2| \leq$
$|sen(xy)||x^2||y| + 2|cos(xy)||x| + 48|x^3||y^2|$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(x,y)| = |sen(xy)x^3 - 24x^4y| \leq |sen(xy)||x^3| + 24|x^4||y|$
Considerando que:
$(1)|cos(x)| \leq 1, |sen(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
$(2)|t_jh_i| \leq |h_i|$
$(3)|h_i| \leq \|h\|$

Por (1):
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(x,y)| \leq |y|^3 + 24|x||y|^4$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2}(x,y)| \leq |x||y|^2 + 2|y| + 48|x|^2|y|^3$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}(x,y)| \leq |x|^2|y| + 2|x| + 48|x|^3|y|^2$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(x,y)| \leq |x|^3 + 24|x|^4|y|$
Evaluamos en $(t_j h_1, t_j h_2)$ y usamos (2)
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq |t_j h_2|^3 + 24|t_j h_1||t_j h_2|^4 \leq |h_2|^3 + 24|h_1||h_2|^4 \leq \|h\|^3 + 24\|h\|^5$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq |t_j h_1||t_j h_2|^2 + 2|t_j h_2| + 48|t_j h_1|^2|t_j h_2|^3 \leq |h_1||h_2|^2 + 2|h_2| + 48|h_1|^2|h_2|^3$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq |t_j h_1|^2|t_j h_2| + 2|t_j h_1| + 48|t_j h_1|^3|t_j h_2|^2 \leq |h_1|^2|h_2| + 2|h_1| + 48|h_1|^3|h_2|^2$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq |t_j h_1|^3 + 24|t_j h_1|^4|t_j h_2| \leq |h_1|^3 + 24|h_1|^4|h_2|$
Usamos (3):
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq \|h\|^3 + 24\|h\|^5$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq \|h\|^3 + 2\|h\| + 48\|h\|^5$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq \|h\|^3 + 2\|h\| + 48\|h\|^5$
$|\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}(t_j h_1, t_j h_2)| \leq \|h\|^3 + 24\|h\|^5$
$|R_2(x_0,h)| \leq \frac{\|h\|^3}{6} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 |\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(t_{ijk} h)|, t_{ijk} \in [0,1]$ **(1 pto)**
Luego, $|R_2(x_0,h)| \leq \frac{\|h\|^3}{6}(2(\|h\|^3 + 24\|h\|^5) + 6(\|h\|^3 + 2\|h\| + 48\|h\|^5))$
Considerando $\|h\| < 1$ tenemos que $\|h\| \geq \|h\|^2 \geq \|h\|^3 \geq \|h\|^4 \geq ...$
$|R_2(x_0,h)| \leq \frac{\|h\|}{3} + 8\|h\| + \|h\| + 2\|h\| + 8\|h\| \leq \frac{58}{3}\|h\|$
Finalmente, imponemos $\frac{58}{3}\|h\| < 10^{-14} \Rightarrow \|h\| < \frac{3 \cdot 10^{-14}}{58} \Rightarrow h \in B((0,0); \frac{3 \cdot 10^{-14}}{58})$ **(1 pto)**