(P) Considere la función $f(x,y) = \text{sen}(xy) + \cos(xy)$

(i) Justifica la existencia y encontrar polinomio de Taylor $P_2(x,y)$ de orden 2 de f en torno a $(0,0)$

(ii) Si se quiere que el error sea menor a 10^{-14} ¿Qué tamaño debe tener (h_1,h_2)?

Sol.

(i) Para que el polinomio de Taylor exista, buscamos que f sea $\mathcal{C}^2$. Para esto, calculamos sus d.p. y verificamos que son $\mathcal{C}^1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y\cos(xy) - y\,\text{sen}(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x\cos(xy) - x\,\text{sen}(xy) \end{aligned}\right\}$$

Los cuales son $\mathcal{C}^1$, pues los polinomios, $\text{sen}(\cdot)$ y $\cos(\cdot)$ son $\mathcal{C}^1$. Se concluye por algebra de $\mathcal{C}^1$.

Con esto, existe el polinomio de Taylor de orden 2. Calculemos: Necesitamos $\nabla f|_{(0,0)}$; $Hf(0,0)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = -y^2\,\text{sen}(xy) - y^2\cos xy = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = -x^2\,\text{sen}(xy) - x^2\cos(xy) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy\,\text{sen}\,xy - \text{sen}\,xy - xy\cos(xy) = 1$$

(Schwarz) f es $\mathcal{C}^2$.

Entonces:

$$\nabla f|_{(0,0)} = (0 \quad 0) \qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(0,0) = 1$$

Luego:

$$P_2(h_1,h_2) = 1 + \frac{1}{2}(h_1 \;\; h_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 + h_1 h_2$$

(ii) Para usar la fórmula del error, necesitamos que f sea $\mathcal{C}^3$. Veamos que las derivadas de orden 2 son $\mathcal{C}^1$: en efecto, por álgebra de fns $\mathcal{C}^1$ (pols., $\text{sen}(\cdot)$, $\cos(\cdot)$), claramente son $\mathcal{C}^1$ $\rightarrow$ f es $\mathcal{C}^3$.

Ahora, acotamos R_2. Sabemos que:

$$R_2(h) = \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0 + t_{ijk} h)\, h_i h_j h_k \quad , x_0 = 0$$

(en este caso)

Calculamos derivadas de orden 3:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -y^3 \cos(xy) + y^3 \operatorname{sen} xy = y^3(\operatorname{sen}(xy) - \cos(xy))$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^3(\operatorname{sen}(xy) - \cos(xy))$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = y(-xy\cos(xy) - 2\operatorname{sen}(xy) + xy\operatorname{sen}(xy) - 2\cos(xy))$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = x(-xy\cos(xy) - 2\operatorname{sen}(xy) + xy\operatorname{sen}(xy) - 2\cos(xy))$$

Ahora, en general, si usamos $\|\cdot\|_\infty$, tendremos que $|h_1| \le \|(h_1,h_2)\|_\infty$; $|h_2| \le \|(h_1,h_2)\|_\infty$ y podemos acotar como:

$$|R_2(h)| = \left|\frac{1}{3!}\sum_{j}^{2}\sum_{i}^{2}\sum_{k}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(t_{ijk} h)\, h_i h_j h_k\right|$$

por desigualdad triangular

$$\le \frac{1}{3!}\sum_{i}^{2}\sum_{j}^{2}\sum_{k}^{2}\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(t_{ijk} h)\right| |h_i||h_j||h_k|$$

pues $|h_i| < \|h\|$ $\forall i \in \{1,2\}$

$$\le \frac{\|h\|^3}{3!}\sum_{i}^{2}\sum_{j}^{2}\sum_{k}^{2}\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(t_{ijk} h)\right|$$

Ahora, acotamos las d.p:

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right| \le |y|^3(|\operatorname{sen}(xy)| + |\cos(xy)|) \le 2|y|^3$$

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right| \le 2|x|^3$$

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}\right| \le |x|(|x||y||\cos(xy)| + 2|\operatorname{sen}(xy)| + |xy||\operatorname{sen} xy| + 2|\cos xy|)$$

$$\le |x|(2|x||y| + 4)$$

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right| \le |y|(2|x||y| + 4)$$

Entonces:

Como $t_{ijk} \in [0,1]$, $|t_{ijk} h_1| \le |h_1| \le \|h\|_\infty$

$$|t_{ijk} h_2| \le |h_2| \le \|h\|_\infty$$

Entonces, podemos acotar como:

$$|R_2(h)| \leq \frac{\|h\|^3}{3!}\Big(2|h_2|^3 + 2|h_1|^3 + 3|x|(2|x||y|+4) + 3|y|(2|x||y|+4)\Big)$$

$$\leq \frac{\|h\|^3}{3!}\Big(2\|h\|^3 + 2\|h\|^3 + 6\|h\|^3 + 12\|h\| + 6\|h\|^3 + 12\|h\|\Big)$$

$$= \frac{\|h\|^3}{3!}\big(16\|h\|^3 + 24\|h\|\big)$$

Como buscamos que el error sea menor que 10^{-14}, podemos pedir que

$$\frac{\|h\|^3}{3!}\big(16\|h\|^3 + 24\|h\|\big) < 10^{-14}$$

De donde se puede tener $\|h\|$ tal que se cumpla la desigualdad sin suponer nada.
Otra forma, puede ser suponiendo que $\|h\| < 1$ (intuición)
$\Rightarrow \|h\|^3 < \|h\|$

$\Rightarrow$ Acotamos por $\frac{\|h\|^3}{3!} \cdot 40\|h\|$ e imponemos:

$$\frac{40\|h\|^4}{3!} < 10^{-14} \iff \|h\| < \sqrt[4]{\frac{3!\cdot 10^{-14}}{40}}$$

Suerte! Espero haya quedado más claro

Ricardo