UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 – Álgebra Lineal
Semestre Otoño 2011

PAUTA AUXILIAR Nº5

1.

Dadas las rectas L_1 y L_2 definidas como sigue:

$$L_1: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad y \quad L_2: \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

i. Demostrar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
ii. Deducir la ecuación cartesiana del plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2
iii. Encontrar la distancia entre las rectas L_1 y L_2

Pauta.

Empezamos encontrando la ecuación vectorial de L_2:

$$L_2: \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

i. Igualamos las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2, tras lo cual encontramos el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Procedemos a resolver la ecuación matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Esto da un sistema que no posee solución, por lo que L_1 y L_2 no se cruzan en ningún momento.

ii. La ecuación vectorial del plano pedido es

$$\Pi: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

En la primera ecuación paramétrica se despeja s:

$$x = t + s \Longrightarrow s = x - t \qquad (1)$$

Profesor: Felipe Célèry
Profesores Auxiliares: Rodrigo Arce, Gonzalo Flores

En la ecuación paramétrica 2, utilizamos (1) para despejar t:

$$y = 1 + t - s \overset{(1)}{\Longrightarrow} y = 1 + t - x + t = 1 - x + 2 * t$$

$$\Longrightarrow t = \frac{x + y - 1}{2} \tag{2}$$

La ecuación (2) se reemplaza en (1):

$$s = \frac{x - y + 1}{2} \tag{3}$$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en la última ecuación paramétrica es posible encontrar la ecuación cartesiana:

$$z = t + s \Leftrightarrow z = \frac{x + y - 1}{2} + \frac{x - y + 1}{2}$$

$$\Longrightarrow x - z = 0 \tag{4}$$

Aquí, dado que y no aparece en la ecuación cartesiana, y es un valor libre en $\mathbb{R}$.

iii. Tomemos un punto cualquiera en L_1 y proyectémoslo sobre L_2. Con ello, la proyección vendrá dada por:

$$r = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle * \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\|^2}$$

Donde el punto a proyectar es:

$$P = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Luego:

$$r = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3} * \left\langle \begin{pmatrix}-1+t\\-1+t\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{t}{3} * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \tag{5}$$

Finalmente, calculamos la distancia entre P y r:

$$d(P,r) = \|P - r\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{t}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2t}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\Rightarrow d(P,r) = \sqrt{\left(-1 + \frac{2t}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{4t}{3}\right)^2 + \left(\frac{2t}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} * \sqrt{4t^2 - 6t + 3}$$

2. [Control 1, Otoño 2008]

Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i. Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1

ii. Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$.

iii. Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

iv. Calcule la distancia de P a la recta L.

Pauta.

Primero escribimos la ecuación vectorial del plano:

$$\Pi_1: \quad t * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De los vectores directores es posible encontrar el vector normal al plano:

$$n = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$n = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i. Calculamos la proyección pedida:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left. \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle/ \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2 \right. = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii. Para encontrar la recta, lo más recomendable es encontrar dos puntos distintos que pertenezcan a ambos planos. Para ello utilizamos las ecuaciones cartesianas del plano:

$$\Pi_1: \quad x + y - z = 0$$
$$\Pi_2: \quad x + 2y = 2$$

De ellas, se obtienen los siguientes puntos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que la recta queda ($L: A + t * (B - A)$):

$$L: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii. La proyección de P_0 sobre la recta L, que llamaremos P_{0L}, queda definida por:

$$P_{0L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left. \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle/ \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 \right. = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} * \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{0L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iv. Para calcular dicha distancia, lo primero corresponde a calcular la proyección de P sobre la recta L, P_L:

$$P_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} * \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = P_{0L}$$

Finalmente, se calcula la distancia en P y P_L:

$$d(P, P_L) = \|P - P_L\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$$

3. [Control 4, 2005]

Se define las rectas

$$L_1: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad y \quad L_2: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que L_1 y L_2 no se interceptan.
b) Encuentre la ecuación normal del plano Π que contiene a la recta L_1 y es paralelo a L_2.
c) El punto $P = (3,1,-1)^T$ pertenece a L_2. Encuentre la proyección ortogonal de P sobre el plano Π de la parte b)
d) Dé la ecuación del plano paralelo a Π que está a la misma distancia de L_1 y L_2 (Π es el plano de la parte b)).

Pauta.

a) Igualando las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2, se procede a encontrar la ecuación matricial para luego resolverla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Como el sistema no tiene solución (la última ecuación es incompatible), las rectas no se cruzan en ningún momento.

b) La ecuación vectorial del plano es:

$$\Pi: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De este modo, la normal al plano es:

$$n = d_1 \times d_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con ello, la ecuación normal del plano es:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

c) Llamando P_0 a la proyección de P sobre el plano Π, y utilizando la fórmula de proyección de un punto sobre un plano, se obtiene que:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} * \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{12}{9} * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

d) Sea Π_1 el plano que se desea encontrar. Ya se cuenta con los vectores directores de dicho plano así como con su normal (recuerde que $\Pi \parallel \Pi_1$). Para el punto que se utilizará como referencia se utiliza la información brindada en la parte c). En la ecuación (6) donde se proyecta el punto P, que pertenece a L_2, sobre el plano Π, que contiene a L_1, basta con considerar el punto medio entre P y P_0. A dicho punto lo llamaremos P_1:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P_1 = \frac{P + P_0}{2}$$

Finalmente, la ecuación vectorial y normal del plano es:

$$\Pi_1: \begin{array}{ll} \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & Ec. Vectorial \\ \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 & Ec. Normal \end{array}$$