Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Auxiliar 9
MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Figueroa
Auxiliares: Roberto Castillo, Francisco Castro
Miércoles 25 de Mayo de 2011

P1.- Sea $A = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Se define sobre A la operación $\circ$ por:

$$(x, y) \circ (u, v) = (xu, yv)$$

1. Demuestre que $(A, \circ)$ es un grupo abeliano.
2. Dado $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se define H como:
$$H = \{(x, y) \in A | y = x^a\}$$
Demuestre que $(H, \circ)$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.

P2.-

1. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano. Sean $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Pruebe que el conjunto:
$$H * K = \{h * k | h \in H, \quad k \in K\}$$
es subgrupo de $(G, *)$.
2. Sea $(G, *)$ un grupo finito de orden 4 con neutro e. Demuestre que para $a \in G\backslash\{e\}$, $a^3 \neq e$.

P3.-
Sean $(G, *)$ y $(H, \circ)$ dos grupos. Se define en $G \times H$ la l.c.i.:

$$(g, h)\triangle(g', h') = (g * g', h \circ h')$$

1. Demuestre que $(G \times H, \triangle)$ es un grupo.
2. Demuestre que las funciones $\varphi : G \times H \to G$ y $\psi : G \times H \to H$ definidas por $\varphi(g, h) = g$ y $\psi(g, h) = h$, son epimorfismos.
3. Si $G = H$ y $* = \circ$, se considera $f : G \times G \to G$ dada por $f(a, b) = (a * b)^{-1}$. Demuestre que f es un homomorfismo si y sólo si $(G, *)$ es grupo abeliano.

P4.-
En $\mathbb{Z}^2$ se definen las siguientes leyes de composición interna:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, 0)$$

Sabiendo que $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es grupo abeliano (no lo demuestre)

1. Verifique que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo.
2. Averigüe si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$ tiene unidad y/o divisores de cero. ¿Es $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$ cuerpo? Justifique

P5.-
Sea $a \in \mathbb{R}$, fijo. Se define la función $\psi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por $\psi(P(x)) = P(a)$, $\forall P \in \mathbb{R}[x]$. Demuestre que ψ es un homomorfismo sobreyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. ¿Es ψ un isomorfismo? Justifique.