

Auxiliar 8 MA1101 :Recuperativo y Estructuras algebraicas

Profesor: Pablo Figueroa Salgado.

Auxiliares:Roberto Castillo Navarro, Francisco Castro A.

Problemas

P1. (a) Demuestre por inducción,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

(b) Se define la función $\phi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\phi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Y para cada número natural $n \geq 2$ se define por recurrencia la función $\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi_n(x_0, \dots, x_n) = \phi_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) + \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

en cada $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Probar usando inducción que

$$\phi_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$$

P2. Sea A un conjunto no vacío y $f : A \rightarrow A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f . Para $n \geq 1$ definimos $f^{(n)}$ como la composición de f con ella misma n veces y si $n < 0$ definimos $f^{(n)} = (f^{-1})^{(|n|)}$. Si $n = 0$ ponemos $f^{(0)} = id_A$. Considere la relación en A definida como:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, f^{(n)}(x) = y$$

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Considere $p \in \mathbb{N} - 0$ fijo. Si $A = \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ se define por $f(q) = pq$, calcular la clase de equivalencia de 0 y de 1 con respecto a $\mathcal{R}$.

P3. (a) Demuestre, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{n+1-k} \geq 2(n+1)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concluya que $(n+2)^{n+1} \geq 2(n+1)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Use a), e inducción, para probar que $2^n n! < (n+1)^n, \forall n \geq 2$.

P4. Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ una operación asociativa. Para $a \in A$, invertible para $*$ y con inverso a^{-1} se define la operación Δ en A por:

$$\forall x, y \in A, x\Delta y = x * a * y$$

(a) Demuestre que la ley Δ es asociativa, tiene neutro y calcúlelo.

(b) Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a con respecto a Δ .

(c) Si $(A, *)$ es grupo, decida si (A, Δ) también lo es.