Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Auxiliar 7

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Figueroa

Auxiliares: Roberto Castillo, Francisco Castro

Miércoles 4 de Mayo de 2011

P1.- Calcule el valor de las siguientes sumas:

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

$$2. \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$$

$$3. \sum_{k=2}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

$$4. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}$$

$$5. \sum_{k=0}^n (\sqrt{3})^{n-k} (\sqrt{2})^k$$

P2.-

Sean $i, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq i \leq n$. Pruebe que

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

y utilícelo para calcular

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

P3.-

Sea A un conjunto con $|A| \geq 2$. Sea $\mathcal{F}(A) = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$, demuestre que $|A| < |\mathcal{F}(A)|$ (es decir, que existe una función inyectiva de A en $\mathcal{F}(A)$, pero que no es posible encontrar una función biyectiva entre estos conjuntos).

P4.-

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea A_n un conjunto numerable. Demuestre que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un conjunto numerable.

P5.-

Sea A un conjunto cualquiera. Se define $P_A = \{f : A \rightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ es función}\}$. Pruebe que $|P_A| = |\mathcal{P}(A)|$.

P6.-

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se define:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

demuestre que si A y B son conjuntos numerables, entonces $A + B$ también lo es.

P7.-

1. Se define el conjunto

$$P_n = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad \forall 0 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

demuestre que es un conjunto numerable.

2. Se define ahora el conjunto

$$P = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

demuestre que también es un conjunto numerable.