

MA1101-8 Introducción al Álgebra. Semestre 2011-1

Profesor: Pablo Figueroa Salgado Auxiliares: Roberto Castillo N. y Francisco Castro A.

Auxiliar 6

27 de Abril de 2011

P1. a) Pruebe, sin usar inducción, que para $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ se tiene que $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$. Luego deduzca que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

b) Calcular las siguientes sumatorias:

$$1) \sum_{k=n}^m \log\left(1 + \frac{1}{k}\right), n \leq m.$$

$$2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!}, 1 \leq n.$$

c) Sea $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+b^2+\dots+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escriba S como una sumatoria, luego calcule S .

P2. Sea A un conjunto numerable. Se define $\Gamma = \{f : \{1, 2, 3\} \rightarrow A : f \text{ es función}\}$. Demuestre que $|\Gamma| = |A \times A \times A|$ y concluya que Γ es numerable.

P3. Demuestre que $C = \{x \in [0, +\infty) : \exists n \in \mathbb{N} - \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.

P4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Además, $f_1 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \{f_n(a) : a \in A, n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que si A es infinito numerable, entonces B es infinito numerable.

P5. a) Sea $A = \left\{\frac{p}{q} : (\exists n \in \mathbb{N}, q = 2^n) \wedge (p \in \mathbb{N}, p < q)\right\}$. Pruebe que A es infinito numerable.

b) Sea $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ y considere la secuencia de elementos en $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in A, \forall i \in \mathbb{N}$. Pruebe que existen $l, j \in \mathbb{N}, l \neq j$ tales que $x_l = x_j$.

P6. Calcular las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{k=1}^n 2^{k-1}.$$

$$b) \sum_{k=1}^n k^3, \sum_{k=1}^n k^4, \sum_{k=1}^n k^5.$$

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$d) \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \left(\frac{k}{(k+1)(k+2)} \right).$$

$$e) \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2.$$

$$f) \sum_{k=1}^n k \ln \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

$$g) \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{j}{3^k}.$$