Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Auxiliar 5
MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Figueroa
Auxiliares: Roberto Castillo, Francisco Castro
Miércoles 20 de Abril de 2011

P1.-

1. Calcule el valor de la suma:
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$$
2. Demuestre que para todo $n \geq 1$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

P2.-
Para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ defina $k = 2^n$. Se quiere probar que todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ de $2k-1$ elementos posee un subconjunto X de k elementos cuya suma es divisible por k

P3.-
Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia. Sean
$$a_1 = a_2 = 1$$
y sea
$$a_n = 3(a_{n-1} + a_{n-2}) + 1, \quad \text{para } n \geq 3$$
Queremos probar que $a_{3n} + a_{3n+1}$ es divisible por 32.

1. Pruebe que $a_{3n+2} - 1$ es divisible por 2.
2. Pruebe que $3a_{3n+1} + 5$ es divisible por 8.
3. Pruebe que $a_{3n} + a_{3n+1}$ es divisible por 32.

P4.-

1. Pruebe sin usar inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$. se tiene que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.
2. Sea $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pruebe que se tiene que
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_n$$
..