Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
13 de Abril de 2011

Auxiliar 4 MA1101

Profesor: Pablo Figueroa Salgado.
Auxiliares:Roberto Castillo Navarro, Francisco Castro A.

Problemas

P1. Sea $\mathcal{R}$ definida en E, una relación simétrica. Definamos una nueva relación en E de la forma siguiente:

$$a\hat{\mathcal{R}}b \iff \exists n \in \mathbb{N}, \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq E : a = x_0, b = x_n \ \wedge \ (\forall i = 0, \dots, n-1)(x_i \mathcal{R} x_{i+1}) \vee (x_i = x_{i+1})$$

Demuestre que $\hat{\mathcal{R}}$ es una relación de equivalencia.

P2. Sea $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \dots \times \mathbb{N}$, el conjunto de n-tuplas con componentes naturales. Se define: $\forall X, Y \in \mathbb{N}^n, X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n)$

$$X\mathcal{R}_1 Y \iff \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \forall k = 1, \dots, n$$

(a) Demuestre $\mathcal{R}_1$ es relación de orden. Es orden parcial o total?

(b) Dada la relación $\mathcal{R}_2$ de orden usual en n-tuplas:

$$\forall X, Y \in \mathbb{N}^n, X\mathcal{R}_2 Y \iff x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n$$

Demuestre que $X\mathcal{R}_2 Y \implies X\mathcal{R}_1 Y$. Con un contraejemplo indique la falsedad de la implicancia en el otro sentido.

P3. Sea $A \neq \phi$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se define la relación $\mathcal{R}^*$ en $A \times A$ por:

$$(a, b)\mathcal{R}^*(a', b') \iff (a\mathcal{R}a') \wedge (b\mathcal{R}b')$$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es orden, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(b) Muestre que si A tiene el menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es sólo un orden parcial.

(c) **i)** Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

ii) Para $(a, b) \in A \times A$, demuestre que

$$[(a, b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}$$

P4. Inducción:

(a) Sea E un conjunto no vacío y $<<$ un orden total sobre E. Probar que si A es un subconjunto finito no vacío de E, entonces existe a en A tal que $\forall b \in A, a << b$.

(b) Pruebe que $\forall m \geq 1, 5^{2m+1} + 7^{2m+1}$ es divisible por 6.

(c) Pruebe que $\forall n \geq 2, n^n \geq 2 \cdot n!$.

(d) Muestre que si $1 \leq n$, entonces

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$