Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Clase Auxiliar 3
MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Figueroa
Auxiliares: Roberto Castillo, Francisco Castro
Miércoles 6 de Abril de 2010

P1.- Sea E un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{P}$ una relación refleja y transitiva definida sobre E. Se define a partir de $\mathcal{P}$ una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E según:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a$$

1. Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
2. Sea $E\backslash\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} | a \in E\}$ donde $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in E | a\mathcal{R}b\}$.
   a) Probar que si $a' \in [a]_{\mathcal{R}}$ y $b' \in [b]_{\mathcal{R}}$ entonces $a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a'\mathcal{P}b'$.
   b) Se define la relación $\mathcal{Q}$ sobre $E\backslash\mathcal{R}$ por:
   $$[a]_{\mathcal{R}}\mathcal{Q}[b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow a\mathcal{P}b$$
   Probar que $\mathcal{Q}$ es relación de Orden ¿Qué condición ha de cumplirse para que $\mathcal{Q}$ sea de orden total?

P2.-

1. Sea $f : E \to F$ una función. Pruebe que f es biyectiva si y sólo si se cumple:
   $$\forall B \subseteq E \quad f(B^c) = f(B)^c$$
2. Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. Se define $g : C \to B$ de modo que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in C$. Demuestre que $\forall D \subseteq B$, $g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$.

P3.-
Sea $E \neq \emptyset$ y $f : E \to E$ una función. Demuestre que:

1. f es biyectiva $\Leftrightarrow$ $f \circ f$ es biyectiva.
2. $\forall A \subseteq E$ $f(A) = A \Leftrightarrow f = id_E$.

3. Si $E = \mathbb{N}$, entonces: $[\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)] \Rightarrow f$ es inyectiva.
4. Construya una función que satisfaga la propiedad anterior, pero no sea sobreyectiva.

P4.-

1. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre que: f es inyectiva $\Leftrightarrow \exists\ g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$.
2. Sea f una función. Se define:
$$F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$$
de modo que $F(X) = f(X)$ (el conjunto imagen de X) para todo $X \subseteq A$. Demuestre que F sobreyectiva $\Leftrightarrow f$ sobreyectiva.