

Auxiliar 2 MA1101

Profesor: Pablo Figueroa Salgado.

Auxiliares: Roberto Castillo Navarro, Francisco Castro A.

Problemas y ejercicios

P1. Sea $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es biyectiva}\}$. Se define $\phi : A \rightarrow A$ tal que, $f \mapsto \phi(f) = f^{-1}$.

- i) Pruebe que ϕ es biyectiva.
- ii) Sean $f, g \in A$. Pruebe que $\phi(f \circ g) = \phi(g) \circ \phi(f)$.

P2. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- Determine si f es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
- Determine $f \circ f$.

P3. Sea $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$. Sea $h : A \times C \rightarrow B \times D$ tal que $h(a, c) = (f(a), g(c))$. Pruebe que

$$h \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ y } g \text{ son biyectivas.}$$

P4. (a) Sea $f : E \rightarrow F$ una función y $A, B \subseteq E$. Pruebe que

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A)$$

(b) Sea $f : E \rightarrow F$ una función que satisface la siguiente propiedad:

$$\forall A, B \subseteq E, (A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B))$$

Pruebe que f es inyectiva.

(c) Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Determine explícitamente f, g sabiendo que $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ y $(g \circ f)(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5}$.

P5. Sea $f : E \rightarrow F$ una función.

- (a) Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$. Pruebe que si A y B son subconjuntos estables entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son estables.
- (b) Pruebe que $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
- (c) Pruebe que $\forall A, B \subseteq F, f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.