

Auxiliar 12 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 17 de Junio, 2011

Profesores Cátedra: Leonardo Sánchez - Pablo Dartnell
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Determine todos los morfismos que hay entre $(\mathbb{Z}_n, +)$ y $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Pregunta 2. Calcule:

- a) $\prod_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j la j -ésima raíz n -ésima de la unidad.
- b) $\sum_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j la j -ésima raíz n -ésima de un complejo cualquiera.

Pregunta 3.

- a) A partir del producto $(1+i)(5-i)^4$ pruebe que:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

- b) Determine los menores naturales m, n tal que:

$$(\sqrt{3} - i)^m = (1 + i)^n$$

Pregunta 4.

- a) Sean $(w_j)_{j=0}^{n-1}$ las raíces n -ésimas de la unidad. Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ se tiene:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

- b) Sea $m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio de grado m definido por:

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

Demuestre que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$$

Pregunta 5.

- a) Se define para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$: $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$. Pruebe que $D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

- b) Se define también para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$: $J_n(x) = \frac{D_0(x) + \dots + D_{n-1}(x)}{n}$. Pruebe que $J_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}$

Indicación: Calcule $nJ_n(x)$