

Auxiliar 11: Introducción al Álgebra

Profesores de Cátedra: Leonardo Sanchez C.

Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell

Viernes 10 de Junio de 2011

P1. Sea $z \in \mathbb{C}$. Probar que

$$|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

P2. Muestre que el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| = 2$$

es una circunferencia en el plano complejo y determine su centro y radio.

P3. Sean $z_1, z_2, \dots, z_p \in \mathbb{C}$ tales que $|z_i| = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Demuestre que si $\sum_{i=1}^n z_i = a$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} = a$.

P4. Sean z_1, z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y solo si $z_1 = z_2$

P5. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que: $(1 + i)^n + (1 - i)^n \in \mathbb{R}$

P6. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha) = 2^n \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\alpha n}{2}\right)$$

y que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\alpha) = 2^n \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\alpha n}{2}\right)$$

P7. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1 + z^n} + \frac{1}{1 + \bar{z}^n} \in \mathbb{R}$$