Auxiliar 10 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 03 de Junio, 2011

Profesores de Cátedra: Pablo Dartnell - Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. En $\mathbb{R}^2$ considere las operaciones: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ y $(a,b)\odot(c,d)=(a\cdot c,b\cdot d)$

a) Pruebe que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
b) Muestre que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ posee divisores del cero.
c) Concluya que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Pregunta 2.

a) Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo finito (i.e. $|A|<\infty$) sin divisores del cero.
Pruebe que $\exists n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, tal que: $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ veces}=0$
Además pruebe que si $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ cumple que: $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a\cdot b\ veces}=0$ entonces:

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a\ veces}=0\ \vee\ \underbrace{1+1+\ldots+1}_{b\ veces}=0$$

b) Sea $(A,+,\cdot)$ anillo tal que $x\cdot x=x\ \forall x\in A$. Pruebe que:
b.1) $x=-x\ \forall x\in A$
b.2) $(A,+,\cdot)$ es anillo conmutativo.
b.3) $(x\cdot y)\cdot(x+y)=0\ \forall x,y\in A$

Pregunta 3. Sean $(A,+,\cdot)$ y $(A',\oplus,\odot)$ dos anillos con neutros aditivos 0 y $0'$ respectivamente y $f:A\to A'$ un homomorfismo de anillos.

a) Se define $I=\{x\in A\mid f(x)=0'\}$
a.1) Demuestre que $(I,+)$ es un subgrupo de $(A,+)$
a.2) Demuestre que $(\forall a\in A)(\forall b\in I),\ a\cdot b\in I\ \wedge b\cdot a\in I$
a.3) Si $(A,+,\cdot)$ tiene unidad u (neutro para $\cdot$) y $\exists x\in I$ tal que x es invertible, pruebe que $f(u)=0'$ y utilicelo para demostrar que $(\forall a\in A)\ a\in I$, es decir $A=I$.
b) Si $(A,+,\cdot)$ y $(A',\oplus,\odot)$ son anillos unitarios, con neutros multiplicativos u y u' respectivamente y $\exists x\in A$ tal que $f(x)$ es invertible en A', pruebe que $f(u)=u'$

Pregunta 4. Sea $(K,+_K,\cdot_K)$ un cuerpo y $(A,+_A,\cdot_A)$ un anillo con unidad y $f:K\to A$ un homomorfismo. Pruebe que:

a) $f(x)\neq 0_A\Leftrightarrow x\neq 0_K$.
b) f es inyectiva.

Pregunta 5.

a) Sea $(G,\cdot)$ un grupo abeliano de cardinalidad $|G|=15$. Consideremos los conjuntos:

$$F=\{g\in G:\ g^5=1\}\quad H=\{g\in G:\ g^3=1\}$$

donde 1 es el neutro de G y $g^n=\underbrace{g\cdot g\ldots\cdot g}_{n\ veces}$

a.1) Pruebe que F y H son subgrupos de G.
a.2) Pruebe que: $F\cap H=\{1\}$
a.3) Pruebe que si F y H no son los subgrupos triviales (i.e. $F,H\neq\{1\}$ y G), entonces $|F|=5$, $|H|=3$. Concluya que:

$$\{f\cdot h\ :\ f\in F,h\in H\}=G$$

<u>Indicación</u>: Si $g^n=1$, considere conjuntos de la forma $\{1,g,\ldots,g^{n-1}\}$.

b) Sea un grupo $(G,\cdot)$ tal que $x\cdot x=e\ \forall x\in G$, en la auxiliar anterior probaron que bajo esta condición G es automáticamente Abeliano. Suponiendo que $|G|$ es finito y $|G|>2$, pruebe que $|G|$ es múltiplo de 4.