

Auxiliar 9: Introducción al Álgebra

Profesores de Cátedra: Leonardo Sanchez C.

Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell

Viernes 27 de Mayo de 2011

P1. Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro e . Se define en $G \times G$ la ley de composición interna Δ como:

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a * c, b * d) \quad \forall a, b, c, d \in G$$

- a) Pruebe que $(G \times G, \Delta)$ es grupo.
- b) Sea $\varphi : G \times G \rightarrow G$ definida por $\varphi(a, b) = (a * b)^{-1}$. Demuestre que si G es abeliano entonces φ es un morfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G, *)$.
- c) Determine bajo qué condiciones es φ un isomorfismo.

P2. Sea $(G, *)$ un grupo de orden 4, con neutro $e \in G$. Pruebe que $(\forall a \in G \setminus \{e\}) a^3 \neq e$.

P3. Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ definido por $S = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Demuestre que $(S, \cdot)$ es un grupo abeliano.

P4. Sea $(G, *)$ un grupo y e su neutro. Demuestre que si $\forall a \in G, a * a = e$, entonces G es abeliano.

P5. Sea $(G, *)$ un grupo y e su neutro. Sea $\preceq$ una relación de orden sobre G tal que:

$$(\forall x, y, z \in G) x \preceq y \Rightarrow x * z \preceq y * z$$

Sean $G_+ = \{x \in G / e \preceq x\}$ y $G_- = \{x \in G / x \preceq e\}$. Demuestre que:

- $G_+ \cap G_- = \{e\}$
- $(\forall x \in G) x \in G_+ \Rightarrow x^{-1} \in G_-$
- $\preceq$ es una relación de orden total si y solo si $G_+ \cup G_- = G$.