Auxiliar 8 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 13 de Mayo, 2011

Profesores de Cátedra: Pablo Dartnell - Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 0. Sea A un conjunto no numerable y $B \subset A$ un conjunto numerable. Pruebe que el conjunto $A \setminus B$ es no numerable. Concluya de esto que $\mathbb{I}$, el conjunto de números irracionales, es no numerable.

Pregunta 1. En nuestra última auxiliar probamos que el conjunto:

$$\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\} \text{ es numerable.}$$

Pruebe que para todo conjunto A: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Deduzca que el conjunto:

$$\mathcal{I} = \{N \subseteq \mathbb{N} \mid N \text{ es infinito}\} \text{ es no numerable}$$

<u>Indicación</u>: Para probar que no existe biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y A considere el conjunto: $X = \{x \in A \mid x \notin \varphi(x)\}$ donde $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ es biyección.

Pregunta 2. Sea A un conjunto cualquiera. Definamos el conjunto: $2^A = \{f : A \to \{0,1\} \mid f \text{ es función}\}$. Pruebe que $|2^A| = |\mathcal{P}(A)|$. Concluya que $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable.

Pregunta 3. Sea $(E, *)$ una estructura algebraica y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall x_1, x_2, y_1, y_2)\ x_1 \mathcal{R} x_2 \wedge y_1 \mathcal{R} y_2 \Rightarrow (x_1 * y_1) \mathcal{R} (x_2 * y_2)$$

en tal caso se dice que $\mathcal{R}$ es compatible con $*$.
Definimos una nueva l.c.i. $\otimes$ sobre el conjunto cuociente $E/\mathcal{R}$ mediante:

$$[x]_{\mathcal{R}} \otimes [y]_{\mathcal{R}} = [x * y]_{\mathcal{R}}$$

a) Pruebe que $\otimes$ está bien definida, es decir, que la clase de equivalencia de $x * y$ no depende de los representantes de $[x]_{\mathcal{R}}$, $[y]_{\mathcal{R}}$ que se escojan
b) Suponiendo que $(E, *)$ posee un neutro e, encuentre el neutro de $(E/\mathcal{R}, \otimes)$.
c) Dado un elemento $x \in E$ que posee inverso en $(E, *)$, determine el inverso de $[x]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$ en $(E/\mathcal{R}, \otimes)$.

Pregunta 4. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$. Sea $\preceq$ una relación de orden sobre G tal que:

$$\forall x, y, z \in G : (x \preceq y) \Rightarrow (x * z \preceq y * z)$$

Sean $G_+ = \{x \in G \mid e \preceq x\}$ y $G_- = \{x \in G \mid x \preceq e\}$. Demuestre que:
a) $G_+ \cap G_- = \{e\}$.
b) $(\forall x \in G)(x \in G_+ \Rightarrow x^{-1} \in G_-)$.
c) $(G_+, *)$ es una estructura algebraica.
d) Si la relación de orden $\preceq$ es total, entonces $G_+ \cup G_- = G$.

Pregunta 5. Sea $(G, *)$ un grupo finito. Sea $H \subset G$ tal que $H \neq \emptyset$ y tal que $*$ define una l.c.i. en H. Pruebe que H es subgrupo de G.
<u>Indicación</u>: Note primero que dado $h \in G$ cualquiera, la función $f : \mathbb{N} \to G$ definida por $f(n) = h^n = \underbrace{h * \ldots * h}_{n \text{ veces}}$ $(h^0 = e)$ no puede ser inyectiva.