

Auxiliar Extra Control 4 - Introducción al Álgebra

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Jueves 05 de Mayo, 2011

Profesores de Cátedra: Pablo Dartnell - Leonardo Sánchez

Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0, \dots, x_n) = \Psi_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_j$

Pregunta 2. Pruebe con y sin inducción que dados $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq n < r$ se tiene:

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

Pregunta 3.

a) Pruebe que: $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$ y deduzca que

$$\binom{n}{0} \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} + \dots + \binom{n}{p} \binom{n-p}{0} = 2^p \binom{n}{p}$$

b) Calcule $\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a^k b^{n-k}$

c) Sean $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$ y $q, b \neq 1$. Considere:

$$S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+\dots+b^n)q^n$$

Escriba S como una expresión de dos sumatorias y calcule su valor.

Pregunta 4. Sea A un conjunto numerable. Se define $\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$ Demuestre que $|\mathcal{F}| = |\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ veces}}|$ y concluya que $\mathcal{F}$ es numerable.

Pregunta 5. Considere el conjunto:

$$\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\}$$

Pruebe que $\mathcal{N}$ es numerable.

Indicación: Considere los conjuntos $\mathcal{N}_k = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}$.