Auxiliar 6 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 29 de Abril, 2011

Profesores de Cátedra: Pablo Dartnell - Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Calcule el valor de la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$$

b) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética de razón d pruebe que $\dfrac{a_n - a_1}{d} = n-1$ y use este resultado para probar sin inducción que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$$

c) Determine el entero positivo n tal que:

$$\frac{n^3-3}{n^3} + \frac{n^3-4}{n^3} + \frac{n^3-5}{n^3} + \cdots + \frac{5}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^3} = 169$$

Pregunta 2. Pruebe los siguientes resultados sin usar inducción:

a) Si $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \neq y$, entonces para todo $n \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i = \frac{x^n - y^n}{x-y}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$$

Pregunta 3.

a) Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$ se tiene:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \text{ y deduzca que } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

b) Dado $p \in \mathbb{N}$ primo y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq p$ pruebe que:

$$\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \in \mathbb{N}$$

Concluya que, si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$$

Pregunta 4. Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \Psi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_j$