Auxiliar 5 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Miércoles 20 de Abril, 2011

Profesores de Cátedra: Pablo Dartnell - Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Pruebe por inducción los siguientes resultados:

a) El producto de tres números naturales consecutivos es divisible por 6.
b) $\forall m \geq 1$ se tiene que: $5^{2m+1} + 7^{2m+1}$ es divisible por 6

Pregunta 2. Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ se tiene:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Pregunta 3. Sea E un conjunto no vacío y $\ll$ un orden total sobre E. Probar que si A es un subconjunto finito no vacío de E entonces, existe $a \in A$ tal que para cada $b \in A$, $a \ll b$
Indicación: Utilice inducción sobre el número de elementos de A.

Pregunta 4. Pruebe por inducción los siguientes resultados:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ un tablero de $2^n \times 2^n$ al cual se le remueve un casillero de alguna de las esquinas puede ser cubierto por triminoes (figura que cubre 3 casilleros, similar a una L)
b) La sucesión de Fibonacci se define como $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = a_2 = 1$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene: $a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Pregunta 5. Sean n rectas en el plano, las cuales dividen al plano en R_n regiones, algunas no acotadas. Pruebe que es posible colorear estas regiones, donde dos regiones adyacentes (que comparten un segmento) tienen distinto color, usando dos colores. ¿Cómo sería el procedimiento si en vez de rectas se utilizan circunferencias?

Pregunta 6. Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot f\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ con f una función que satisface: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ y $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

Indicación: Puede ser útil determinar el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$