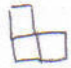
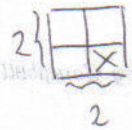
P4 a) Queremos probar que un tablero de $2^n \times 2^n$ cuadros al cual se le quita una esquina se puede cubrir con triminos:  (que pueden rotarse obviamente)

Hagámoslo por inducción:

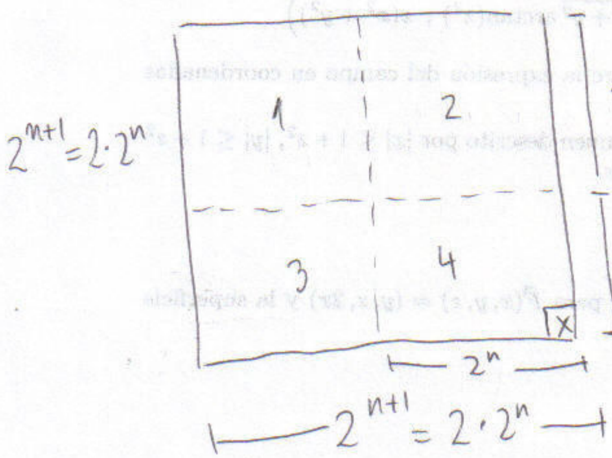
Caso base: $n=1 \rightarrow$ tablero de $2^1 \times 2^1$ sin una esquina



$\Rightarrow$  es exactamente un trimino, por lo que obviamente vale el resultado ✓

HI $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tq un tablero de $2^n \times 2^n$ sin una esquina se puede cubrir con triminos

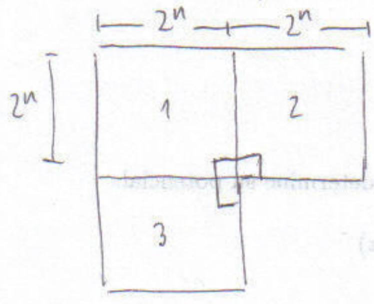
Paso Inductivo: Veamos que podemos cubrir un tablero de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ al que se le remueve una esquina con triminos. En efecto:



Notemos que, como $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ el tablero se puede dividir en 4 tableros de $2^n \times 2^n$, uno de ellos (el 4) está sin una esquina, luego, por HI se puede cubrir por triminos.

Los restantes son de $2^n \times 2^n$ pero sin esquinas removidas, ¿Cómo "simulamos" que se quita una esquina en cada uno?

Basta notar que:



Poniendo un trimino en la esquina inf derecha de 1, esq. inf izq. de 2 y esq sup. derecha de 3 quedan "subtableros" de $2^n \times 2^n$ al cual se les "removió" (o más bien cubrió) una esquina, por HI todos ellos se pueden cubrir con triminos.

$\therefore$ El tablero de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sin una esquina se puede cubrir con triminos, lo que completa el Paso ind.

$\therefore$ Por inducción la prop. es cierta $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

P6] Sea $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tq $f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \ \wedge \ f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

Queremos calcular: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k f\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Sol: La indicacion dice que primero calculemos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$

En efecto: $$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \underbrace{\underbrace{f(1)+f(2)}_{f(1\cdot 2)}+\underbrace{f(3)+f(4)}_{f(3\cdot 4)}}_{f(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)}+\dots+f(n) = f(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = f(n!)$$

Por otra parte, notemos que:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\circ\frac{1}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x)-f(y)$$

Así:

$$\sum_{k=1}^{m} kf\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m} kf\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m} kf(k+1)-kf(k)$$

Notemos que la suma que nos queda es CASI una Telescópica, solo nos falta tener $(k+1)f(k+1)$ en vez de $kf(k+1)$ para ello, armemos eso entonces (usando la indicación)

$$\sum_{k=1}^{m} kf(k+1)-kf(k) = \sum_{k=1}^{m} \underset{\text{lo agrego}}{(k+1)f(k+1)} - kf(k) - \underset{\text{lo quito}}{f(k+1)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m}(k+1)f(k+1)-kf(k)\right)}_{\text{Telescópica}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} f(k+1)}_{\text{Indicación (corrida en 1)}} = (n+1)f(n+1) - 1\cdot f(1) - f((n+1)!)$$

Pero $f(1) = f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)-f(x) = 0$.

$$\therefore \sum_{k=1}^{m} kf\left(1+\frac{1}{k}\right) = (n+1)f(n+1) - f((n+1)!)$$

■