Auxiliar 2: Introducción al Álgebra

Profesores de Cátedra: Leonardo Sanchez C. y Pablo R. Dartnell R.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell
Viernes 01 de Abril de 2011

P1. Sea $f : [0,1) \to [0,1)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

a) Determine si f es una función inyectiva o sobreyectiva.

b) Sea $I = [a,b] \subseteq [0,1)$. Determine el conjunto $f^{-1}(I)$.

P2. Se define F como el conjunto de todas las funciones sobreyectivas $f : D_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \to f(D_{a,b})$ de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ donde a y b son constantes reales no nulas y $D_{a,b}$ es el mayor conjunto donde f está bien definida.

a) Encuentre $D_{a,b}$.

b) Encuentre condiciones para a y b de modo que f sea biyectiva.

c) Si f es invertible, encuentre f^{-1} y muestre que $f^{-1} \in F$.

P3. Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y sea $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $f(X,Y) = X \cup Y$.

a) Calcular $f^{-1}(\{\emptyset\})$.

b) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$.

c) Determine si f es sobreyectiva.

d) Determine si f es inyectiva.

P4. Para $a, b \in \mathbb{R}$ definimos la recta $L_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax + b\}$ y definimos el conjunto $\mathcal{L} = \{L_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2 / a, b \in \mathbb{R}\}$. Se define además

$$\mathcal{H} = \{(L, L') \in \mathcal{L}^2 / L \cap L' \neq \emptyset, L \neq L'\}.$$

Definimos por último $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$ la función tal que $\psi((L,L')) = (x_0, y_0)$, donde (x_0, y_0) es el único punto de intersección de L y L'.
Pruebe que ψ es una función sobreyectiva.