Auxiliar 3 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Viernes 08 de Abril, 2011

Profesores de Cátedra: Pablo Dartnell - Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Considere las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Pruebe que ambas son funciones biyectivas, Luego considere la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine $h^{-1}((-\infty, -1))$, ¿Qué puede concluir sobre h?

b) Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N}^*$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida para cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.
Determine los conjuntos preimágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$

Pregunta 2.

a) Se dice que una funcion f es *estrictamente creciente* si: $\forall x, y \in Dom(f)$ con $x < y$ se tiene $f(x) < f(y)$.
Pruebe entonces que:

a.1) Toda función estrictamente creciente es inyectiva.

a.2) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y f es estrictamente creciente, ¿es f biyectiva?

b) Considere las funciones $f, g : A \to B$ con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva. Se define $\varphi : A \to B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in A$.
Pruebe que φ es inyectiva.
Indicación: Recuerde que $(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow [(a \neq c) \vee (b \neq d)]$

Pregunta 3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ Es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Justifique el hecho que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.

b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.

c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ se tiene:

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

Pregunta 4. Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. Se define: $g : C \to B$ tal que $g(x) = f(x) \quad \forall x \in C$
Demuestre que: $\forall D \subseteq B, \quad g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

Pregunta 5. Sea $f : X \to Y$ una función. Pruebe que $\forall A, B \subseteq X$

$$f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$$

Muestre además que si f es inyectiva, entonces

$$f(A) \triangle f(B) = f(A \triangle B)$$