

Pendientes Aux 1. (MAM01 - sec 6 - 2011 otoño)

P7] a) A, B, C subconjuntos de U . Probar que:

$$(A \cap B) \subseteq C \Rightarrow (A \cap C^c) \subseteq B^c$$

Sol. Hay 2 formas de hacer estos problemas

1) Trabajando directamente con los conjuntos:

Como debemos probar una implicación, supongamos como hipótesis que $(A \cap B) \subseteq C$.

Debemos probar entonces que: $A \cap C^c \subseteq B^c$.

En efecto, de la hipótesis:

$$(A \cap B) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (*)$$

Como sabemos que si: $X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z$, podemos intersectar lo que

tenemos con A :

$$\Rightarrow A \cap C^c \subseteq (A^c \cup B^c) \cap A = \underbrace{(A^c \cap A)}_{\emptyset} \cup (B^c \cap A) = B^c \cap A.$$

lo decir: $A \cap C^c \subseteq B^c \cap A \subseteq \underbrace{B^c}_{\emptyset}$
 $\uparrow$ pues $x \cap y \subseteq x \quad \forall x, y \text{ cts.}$ que era lo deseado.

2) Trabajando con las expresiones lógicas (con los eltos.)

Nuevamente, por hipótesis $(A \cap B) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq A^c \cup B^c. (*)$

ahora, ~~sea~~ probamos que $A \cap C^c \subseteq B^c \Leftrightarrow [\forall x \in A \cap C^c \Rightarrow x \in B^c]$

$$\text{Sea } x \in A \cap C^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C^c \Rightarrow x \in A \wedge (x \in A^c \vee x \in B^c)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[(x \in A \wedge x \in A^c) \vee (x \in A \wedge x \in B^c)]}_{F} \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B^c) \xrightarrow{[p \wedge q \Rightarrow q]} x \in B^c$$

lo decir, probamos que si $[x \in A \cap C^c \Rightarrow x \in B^c]$ lo que es equivalente a decir que $A \cap C^c \subseteq B^c$, que era lo deseado.

b) Dem. que: $(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$.

Trabajemos directamente con los cts.

$$\text{Hipótesis: } (B \setminus A) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B \setminus A)^c = (B \cap A^c)^c = B^c \cup A$$

es decir: $C^c \subseteq B^c \cup A \quad / \cap D \Rightarrow D \cap C^c \subseteq (B^c \cup A) \cap D = (B^c \cap D) \cup \underbrace{(A \cap D)}_{\subseteq A}$
 $\subseteq (B^c \cap D) \cup A$.

es decir: $D \cap C^c \subseteq (B^c \cap D) \cup A \Leftrightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$.

P8 | a) $A=B \Leftrightarrow P(A)=P(B)$ [El P8 lo hicimos en clase en todo caso]

$\Rightarrow$ | Hipot: $A=B$

Veamos que $P(A)=P(B)$, en efecto:

Sea $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A = B \Leftrightarrow X \subseteq B \Leftrightarrow X \in P(B)$

es decir: $[X \in P(A) \Leftrightarrow X \in P(B)] \xrightarrow{\text{hipot}} \Leftrightarrow P(A)=P(B)$. ✓

$\Leftarrow$ | Hipot: $P(A)=P(B)$

Veamos que $A=B$, en efecto:

por def: $A \subseteq A \Leftrightarrow A \in P(A)=P(B) \Leftrightarrow A \in P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

para probar $B \subseteq A$ es análogo. $\therefore A=B$.

b) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$.

$\Leftarrow$ | Sup. que $A \subseteq B \vee B \subseteq A$; el caso $A=B$ es directo, así que veamos el caso

$A \subseteq B$ | $A \neq B$ (el caso $B \subseteq A$, $A \neq B$ es análogo)

Como $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ y $P(A) \cup P(B) = P(B)$ (esto último pues $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$)

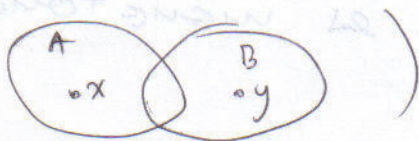
$\Rightarrow P(A \cup B) \stackrel{A \cup B = B}{=} P(B)$ y $P(A) \cup P(B) = P(B) \therefore P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ ✓

$\Rightarrow$ | Hagámosla por contradicción, es decir, asumiendo la hipótesis

~~$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$~~ , supongamos que NO ocurre $A \subseteq B \vee B \subseteq A$

que no ocurra $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ significa que $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$
 $\wedge \exists y \in B$ tal que $y \notin A$.

(idea gráfica



Para generar una contradicción, consideremos el conjunto:

$$J = \{x, y\}$$

Obviamente $J \subseteq A \cup B$ (pues $x \in A, y \in B$)

Luego $J \in \mathcal{P}(A \cup B)$

pues, como $x \notin B$ y $y \notin A$

$$\Rightarrow \{x, y\} \notin \mathcal{P}(A) \text{ y } \{x, y\} \notin \mathcal{P}(B) \Rightarrow J = \{x, y\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

pues $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \rightarrow$ pues $J \in \mathcal{P}(A \cup B)$ pero $J \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) !!!$

$\therefore A \subseteq B \vee B \subseteq A$, como se quería probar

P9) Notemos que lo único que sabemos de $\mathcal{F}$ es que si $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \oplus B = A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$
entonces, tendremos que aprovechar esto de forma apropiada para demostrar lo pedido

a) Pdg $A^c \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F} \quad \mathcal{F}$

Dem. Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \oplus A = A^c \cap A^c = A^c \in \mathcal{F} \checkmark$

b) Pdg $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Dem. de a): si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow A^c \oplus B^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{F} \checkmark$$

c) Pdg $A \cup B \in \mathcal{F}$

Dem. Como $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \oplus B = A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$

$$\text{y de a), como } A^c \cap B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cap B^c)^c = A \cup B \in \mathcal{F} \checkmark$$

d) Pdg $A \Delta B \in \mathcal{F}$.

Dem. Como $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$ de c) y b) $A \cap B \wedge A \cup B \in \mathcal{F} \xRightarrow{a)} (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \wedge (A \cup B) \in \mathcal{F}$

$$\text{como } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \underbrace{(A \cup B)}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{(A \cap B)^c}_{\in \mathcal{F}} \xrightarrow{\text{por b)}} \in \mathcal{F} \checkmark$$

e) $\emptyset \in \mathcal{F}$? Dem. Por a), si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow A \oplus A^c \in \mathcal{F} \text{ pero } A \oplus A^c = A^c \cap A = \emptyset \in \mathcal{F} \checkmark$$

y finalmente, por a), como $\emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset^c = \mathcal{U} \in \mathcal{F} \checkmark$

éxito mañana!