Auxiliar Introducción Al Álgebra | 15-06-2011

Sección 4, Aux: César Vigouroux

P1 Sean $1, w_1, w_2, w_3$ y w_4 las raíces quintas de la unidad. Demuestre que:

$$(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4) = 5$$

Sol: (Sabiendo algo de polinomios).

Primero, dado que $1 = w_0, w_1, \dots, w_4$ son las raíces quintas de la unidad, todos son solución de la ecuación $z^5 = 1$ (ser raíz n-ésima de la unidad es ser solución de la ecuación $z^n = 1$); esto es equivalente a ser raíz del polinomio $p(z) = z^5 - 1$. Luego, el polinomio p puede factorizarse como $p(z) = (z-w_0)(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)$.

Luego, podemos ahora dividir este polinomio por $(z-w_0) = (z-1)$; por un lado $p(z) : (z-1) = (z-w_1)\cdot(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)$, por otro lado (dividiendo propiamente tal, como en el colegio).

$$
\begin{array}{l}
z^5 - 1 : z-1 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\
\underline{z^5 - z^4} \\
\quad z^4 - 1 \\
\quad \underline{z^4 - z^3} \\
\qquad z^3 - 1 \\
\qquad \underline{z^3 - z^2} \\
\qquad\quad z^2 - 1 \\
\qquad\quad \underline{z^2 - z} \\
\qquad\qquad z - 1 \\
\qquad\qquad \underline{z - 1} \\
\qquad\qquad\quad 0 //
\end{array}
$$

Luego, $z^4+z^3+z^2+z+1 = (z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)$ $\forall z$.

Ahora, si evaluamos a ambos lados en $z=1$;

$$1+1+1+1+1 = 5 = (1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4),$$

probándose así lo pedido. !!

OBS: Aquí usamos algunas propiedades de polinomios y algo de astucia. Si no se tuviese ni la astucia en cuestión ni los conocimientos básicos usados de polinomios, habríamos tenido que usar propiedades tales como:

→ Si w es raíz de la unidad $\Rightarrow \overline{w}$ también lo es.

→ Las raíces n-ésimas de la unidad son $w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$; en particular, en este problema, serían $w_0 = 1$, $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $w_2 = e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $w_3 = e^{\frac{6\pi i}{5}} = \overline{w_2}$ y $w_4 = e^{\frac{8\pi i}{5}} = \overline{w_1}$.

$\rightarrow \; w_K = (w_1)^K \quad \forall K \in \{0, \dots, n-1\}$, con $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ (válido para $n \geq 2$)

$$\rightarrow \; \sum_{K=0}^{n-1} w_K = \sum_{K=0}^{n-1} (w_1)^K = \frac{1-(w_1)^n}{1-w_1} = \frac{1-1}{1-w_1} = 0$$

la suma de todas las raíces n-ésimas de la unidad

Así, $(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4)$

$$= (1-w_1)(1-w_4)(1-w_2)(1-w_3)$$

$$= \left(1-(w_1+w_4)+w_1\cdot w_4\right)\left(1-(w_2+w_3)+w_2\cdot w_3\right)$$

$$= \Big(1-(w_1+w_4)+\underbrace{(w_1)^5}_{=1}\Big)\cdot\Big(1-(w_2+w_3)+\underbrace{(w_1)^5}_{=1}\Big)$$

$$= \left(2-(w_1+w_4)\right)\left(2-(w_2+w_3)\right)$$

$$= 4-2\underbrace{(w_1+w_2+w_3+w_4)}_{=-1} + (w_1+w_4)(w_2+w_3)$$

$$= 4+2+w_1\cdot w_2+w_1\cdot w_3+w_4\cdot w_2+w_4\cdot w_3$$

$$\overset{*}{=} 6+\underbrace{w_3+w_4+w_1+w_2}_{=-1} = 6-1 = 5 \quad //$$

Para $*$ se usó: $w_1\cdot w_2 = w_1\cdot w_1^2 = w_1^3 = w_3$,

$$w_3\cdot w_4 = w_1^3\cdot w_1^4 = w_1^7 = \underbrace{w_1^5}_{=1}\cdot w_1^2 = w_2$$

y así :)

P2 Demostrar utilizando las propiedades de las raíces de la unidad que $\forall n \geq 2$,

$$S_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = -1$$

$$\text{y } S_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

<u>Sol</u>:

Notemos lo siguiente:

$$S_1 + i \cdot S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

raíz n-ésima de la unidad!!

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}}}_{=0} - 1 = -1$$

$$\Rightarrow S_1 + i S_2 = -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(S_1 + i S_2) = \operatorname{Re}(-1) \wedge \operatorname{Im}(S_1 + i S_2) = \operatorname{Im}(-1)$$

$\Rightarrow s_1 = -1 \wedge s_2 = 0$ //.

(Recordar que si $a+ib = c+id \Rightarrow a=c \wedge b=d$)

P3 Se define el grupo abeliano $(S,\cdot)$, $S \subseteq \mathbb{C}$ por $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y "$\cdot$" la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

(a) Demuestre que si z es raíz n-ésima de la unidad $(n \geq 2)$, y n es divisor de m, entonces z es raíz m-ésima de la unidad.

Sol: Dado que z es raíz n-ésima de la unidad, se tiene que $z^n = 1$. Como n es divisor de m, $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $m = n \cdot k$. Luego

$$z^m = z^{nk} = (z^n)^k = 1^k = 1 \Rightarrow z \text{ es raíz m-ésima}$$

de la unidad. //

(b) Sea $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid$ para algún $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, z es raíz n-ésima de la unidad $\}$. Muestre que $(U, \cdot)$ es subgrupo de $(S, \cdot)$.

Sol:

Clara% $U \neq \emptyset$, pues $1 \in U$ ($\forall n \geq 2$, 1 siempre es raíz n-ésima de la unidad). Además, si $z \in U$, clara% $|z| = 1$, $\Rightarrow U \subseteq S$.

Veamos que se cumple que $\forall z_1, z_2 \in U$, $z_1 \cdot z_2^{-1} \in U$ (para ver que es subgrupo).

Dado que $z_1, z_2 \in U$, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

tq' $z_1 = e^{\frac{2k_1\pi i}{n_1}}$, $z_2 = e^{\frac{2k_2\pi i}{n_2}}$

Luego, $z_2^{-1} = \left(e^{\frac{2k_2\pi i}{n_2}}\right)^{-1} = e^{\frac{-2k_2\pi i}{n_2}} \; (= \overline{z_2})$

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = e^{\frac{2k_1\pi i}{n_1}} \cdot e^{\frac{-2k_2\pi i}{n_2}}$$
$$= e^{\left(\frac{2k_1\pi}{n_1} + \frac{-2k_2\pi}{n_2}\right)i} = e^{2\left(\frac{k_1 \cdot n_2 - k_2 n_1}{n_1 \cdot n_2}\right)\pi i}$$
$$= e^{2\frac{\tilde{k}}{\tilde{n}}\pi i}, \quad \text{con } \tilde{k} = k_1 n_2 - k_2 n_1 \in \mathbb{Z} \text{ y } \tilde{n} = n_1 \cdot n_2 \in$$

Luego, $z = z_1 \cdot z_2^{-1}$ es raíz $\tilde{n}$-ésima de la unidad, por lo tanto $z \in U$ ■

EXAMEN 2008

P4 Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z+w| = |z-w|$, $w \neq 0$.

(i) pruebe que $Re(z\cdot\overline{w}) = 0$.

Sol: Si $|z+w| = |z-w|$

$$\Rightarrow |z+w|^2 = |z-w|^2$$

$$\Leftrightarrow (z+w)\overline{(z+w)} = (z-w)\overline{(z-w)}$$

$$\Leftrightarrow (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = (z-w)(\overline{z}-\overline{w})$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z\overline{z}} + z\overline{w} + w\overline{z} + \cancel{w\overline{w}} = \cancel{z\overline{z}} - z\overline{w} - w\overline{z} + \cancel{w\overline{w}}$$

$$\Leftrightarrow 2(z\overline{w} + \overline{z}w) = 0$$

pero $\overline{z}w = \overline{z\overline{w}}$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}_{= 2Re(z\overline{w})}) = 0$$

$$\Rightarrow Re(z\overline{w}) = 0 \quad //$$

(ii) Demuestre que $Re\left(\frac{z}{w}\right) = 0$.

Sol: es trivial, sabiendo que $\frac{z}{w} = z\cdot w^{-1} = z\cdot\frac{\overline{w}}{|w|^2}$

y usando (i): $Re\left(\frac{z}{w}\right) = Re\left(z\cdot\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right) = \frac{1}{|w|^2}\cdot Re(z\cdot\overline{w}) = 0 \quad //$

EXAMEN 2007

P5

(a)

(i) Resuelva la ecuación

$$x^2-(2\cos\theta)x+1=0, \quad \text{con } \theta\in\mathbb{R}.$$

<u>Sol</u>: usando la fórmula más amiga de la vida de un matemático:

$$x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{(2\cos\theta)^2-4}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{2}\cos\theta\pm\cancel{2}\sqrt{\cos^2-1}}{\cancel{2}}$$

$$=\cos\theta\pm\sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$=\cos\theta\pm i\operatorname{sen}\theta=e^{\pm\theta i}$$

(ii) Encuentre todas las raíces del polinomio

$$p(x)=x^{2n}-(2\cos\theta)x^n+1, \quad \text{con } \theta\in\mathbb{R},\ n\geq 2.$$

<u>Sol</u>: haciendo un pequeño cambio de variable, llamamos $z=x^n$. Luego, de (i) sabemos que

si $z^2-(2\cos\theta)z+1=0 \Rightarrow z=e^{\pm\theta i}$

pero $x^n = z = e^{\pm\theta i}$

veamos el caso (+):

$$x^n = e^{\theta i} \iff x^n e^{-\theta i} = 1$$
$$\iff x^n \cdot \left(e^{\frac{-\theta i}{n}}\right)^n = 1$$
$$\iff \left(x e^{\frac{-\theta i}{n}}\right)^n = 1$$
$$\Rightarrow x \cdot e^{\frac{-\theta i}{n}} \text{ es raíz } n\text{-ésima de la unidad}$$

$$\Rightarrow x \cdot e^{\frac{-\theta i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \; k \in \{0, \ldots, n-1\}$$
$$\Rightarrow x = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{\theta i}{n}} = e^{\frac{(2k\pi + \theta)i}{n}}$$

para el caso (−) es análogo.

Luego, $x = e^{\frac{(2k\pi \pm \theta)i}{n}}, \; k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

OBS: para resolver raíces n-ésimas de un complejo z_0 cualquiera, el "procedimiento" es el mismo, y se tiene que las raíces n-ésimas de z_0 serán $(z_0)^{1/n} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \; k \in \{0, \ldots, n-1\}$, es decir, la "raíz directa" de z_0 multiplicada por alguna raíz n-ésima cualquiera de la unidad. ☺

(iii) Factorice en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio anterior para $n=3$ y $\sigma=\pi/2$

Sol: De la parte anterior, sabemos que las raíces del polinomio anterior son:

$$w_k = e^{\frac{(2k\pi+\pi/2)i}{3}}, \quad k=0,1,2$$

$$\text{y } \tilde{w}_k = e^{\frac{(2k\pi-\pi/2)i}{3}}, \quad k=0,1,2.$$

Luego, la factorización en $\mathbb{C}[x]$ será

$$p(x)=(x-w_0)(x-w_1)(x-w_2)(x-\tilde{w}_0)(x-\tilde{w}_1)(x-\tilde{w}_2).$$

Para la factorización en $\mathbb{R}[x]$, hay que tratar de hallar los pares de raíz y raíz conjugada dentro de las 6 raíces disponibles (3 pares en total), ya que $(x-w)\cdot(x-\overline{w}) = (x^2-x(w+\overline{w})+w\overline{w})$

$$= x^2-x\cdot 2\mathrm{Re}(w)+|w|^2 \in \mathbb{R}[x].$$

$\rightarrow w_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\overline{w}_0 = \tilde{w}_0 = e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$\rightarrow w_1 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\overline{w_1} = e^{-\frac{5\pi}{6}i} = e^{(2\pi-\frac{5\pi}{6})i} = e^{\frac{7\pi}{6}i}$ $\Big\}$ $\overline{w_1}=\tilde{w}_2$ (por descarte)

$\rightarrow \tilde{w}_1 = e^{\frac{3\pi}{6}i} = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $w_2 = e^{\frac{9\pi}{6}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = \overline{\tilde{w}_1}$

Luego, (juntando las parejas)

$$p(z) = \underbrace{(x-w_0)(x-\tilde{w}_0)}\underbrace{(x-w_1)(x-\tilde{w}_2)}\underbrace{(x-w_2)(x-\tilde{w}_1)}$$

$$= (x^2-2Re(w_0)x+|w_0|^2)(x^2-2Re(w_1)x+|w_1|^2)(x^2-2Re(w_2)x+|w_2|^2)$$

$$= \left(x^2-2\cos\left(\pi/6\right)+1\right)\left(x^2-2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+1\right)\left(x^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+1\right)$$

$$= \underbrace{\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)}_{\in \mathbb{R}[x]}\underbrace{\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)}_{\in \mathbb{R}[x]}\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{\in \mathbb{R}[x]} \quad //$$

(b) Calcule $S = 1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+i)^n}$, $n\in\mathbb{N}$.
y exprese su valor de la forma $a+bi$.

Sol: $$S = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+i}}$$

$$\left\{ \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1} = \frac{\overline{1+i}}{|1+i|^2} = \frac{1-i}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1-i}{2} \right.$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1-i}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-i}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(1-i)^{n+1}}{\frac{1+i}{2}}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}$$

$$= (1-i)-\frac{1}{2^{n+1}}(1-i)^{n+2}$$

pero $(1-i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$$\Rightarrow (1-i)^{n+2} = (\sqrt{2})^{n+2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}(n+2)i}$$

$$= 2\sqrt{2}^n\cdot e^{-\frac{\pi n i}{4}}\underbrace{e^{-\frac{\pi i}{2}}}_{-i} = 2\sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)(-$$

$$\Rightarrow S = (1-i) - \frac{1}{2^{n+\cancel{1}}} \cdot \cancel{2}\sqrt{2}^{n} \cdot \left(-i\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

$$= (1-i) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - i\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)}_{a} + \underbrace{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1\right)}_{b} i$$

//