

Enunciado Extra Auxiliar
Grupos, Complejos y Polinomios
Auxiliar: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.
16/09/2011

P1. Sea z_1, z_2, \dots, z_n números complejos que representan las coordenadas de los vértices de un polígono regular con centro en un número complejo a ($n \geq 3$). Probar que:

(a) $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n + z_n z_1 = n a^2$

(b) $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n z_i z_j = \binom{n}{2} a^2$

P2. (a) Probar que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

(b) Si $z^2 = \bar{z}^2$, Mostrar que z es puramente real o puramente imaginario.

P3. Calcule:

$$\sum_{n=1}^{2011} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$$

P4. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x) + \cos x - 1}{2 - 2 \cos x}.$$

Para ello sea $z = \cos x + i \sin x$:

(a) Demuestre que

$$S = \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z(z^n - 1)(\bar{z} - 1)}{|z - 1|^2}.$$

(b) Calcule $\operatorname{Re}(S)$

(c) Concluya.

P5. Sea R un anillo donde $\forall a \in R : a^2 = 0$. Probar que $abc + abc = 0$ para todo $a, b, c \in R$.

P6. Sea $f(x) = x^n + \dots + x + 1$ y $g(x) = f(x^{n+1})$. Encontrar el resto cuando $g(x)$ es dividido por $f(x)$.