Problemas Desafío

Examen

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

09/2011

P1. a) Sea G un grupo con la propiedad sue para cualquier par de elementos $a, b \in G$, $(ab)^n = a^n b^n$, con n un entero positivo. Probar que para todos los elementos $a, b \in G$ se tiene que:

$$a^n b^{n-1} = b^{n-1} a^n$$

b) Sea R un anillo donde $\forall a \in R: \; a^2 = 0$. Probar que $abc + abc = 0$ para todo $a, b, c \in R$.

P2. Sea $(1 + x + x^2)^{1000} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2000} x^{2000}$. Encontrar en valor de

$$a_0 + a_4 + a_8 + \ldots + a_{2000}.$$

P3. Sea $P(z) = az^2 + bz + c$, donde a, b, c son números complejos.

a) Si $P(z)$ es real para todo número real z, muestre que a, b, c son números reales.

b) Adicionalmente a (a), asuma que $P(z)$ es no real cuando z no es real. Mostrar que $a = 0$

P4. Sea α, β, γ tres números complejos tales sue $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Además, sea x, y, z tres números reales no nulos tales que $x + y + z = 0 = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Mostrar que $\alpha = \beta = \gamma$.

P5. Sea r y s números complejos no reales distintos entre sí tales que $r + \dfrac{1}{s} \in \mathbb{R}$ y $s + \dfrac{1}{r} \in \mathbb{R}$.

Encuentre en valor de $|r \cdot s|$.

P6. Sea $f(x) = x^n + \ldots + x + 1$ y $g(x) = f(x^{n+1})$. Encontrar el resto cuando $g(x)$ es dividido por $f(x)$.