# Enunciado Auxiliar # 5

**Grupos, Complejos y Polinomios**

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & César Vigouroux G.

09/08/2011

**P1.** Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico con $gr(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisiones por $(x-2)$, $(x-3)$, y $(x-4)$ son iguales.
Determine $p(x)$, justificando sus pasos y encuentre todas sus raices.

**P2.** a) Sean $w_0, w_1, ..., w_n$ las $n$-ésimas raíces de la unidad. Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

b) Sea $m \in \{0, 1, ..., n-1\}$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio de grado $m$ definido por

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$$

Demuestre que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$$

**P3.** Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios tales que

$$z_1 + z_2 = -u, \quad u \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = v, \quad v \in \mathbb{C}$$

(a) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$

(b) Pruebe $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\dfrac{u}{v}$

(c) Prueba que $u = \overline{u} v$.

(d) Si los ángulos de la escritura polares de $u$ y $v$ son $\phi$ y $\theta$, respectivamente es decir $u = |u|e^{i\phi}$ y $v = |v|e^{i\theta}$, utilice (c) para probar $\theta = 2\phi + 2k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

**P4.** a) Demuestre que las raíces de la ecuación de $z^2 + z + 1 = 0$, son raíces cúbicas de la unidad distintas de uno.

b) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ y $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ las raíces n-ésima de $z$.
Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$

**P5.** Sea $(G, *)$ un grupo, y sea $(H, *)$ un subgrupo de $(G, *)$. La traslacion izquierda de $H$ en $G$ con respecto a un $x \in G$ dado se define como $x * H = \{x * h | h \in H\}$ . Pruebe que:

(i) Para cada $x \in G$ se tiene que: $x \in H \Longleftrightarrow x * H = H$

(ii) Para cada $y \in G - H$ se tiene que:$(y * H) \cap H = \phi$