

Problemas Examen # 8
Relaciones y Estructuras Algebraicas
Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.
06/07/2011

P1. (*Construcción algebraica de $\mathbb{Z}$*). Supongamos conocido el conjunto de los números naturales, denotado $\mathbb{N}$.

a) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación R dada por:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (a + d = b + c)$$

Demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) Denotamos $[a, b]$ a la clase de equivalencia de (a, b) . Definimos la relación $\preceq$ en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ dada por:

$$[a, b] \preceq [c, d] \Leftrightarrow a + d \leq b + c$$

Demuestre que $\preceq$ es una relación de orden total.

c) Definimos en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como sigue:

$$[a, b] \oplus [c, d] = [a + c, b + d] \qquad [a, b] \odot [c, d] = [ac + bd, ad + bc]$$

Demuestre que $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo unitario sin divisores de cero.

d) Supongamos $\mathbb{Z}$ conocido. Definimos $f : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow ((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R, \oplus, \odot)$ dada por:

$$f(z) = \begin{cases} [z, 0] & \text{si } z \geq 0 \\ [0, -z] & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es un morfismo de anillos biyectivo.

Nota: Lo recién hecho motiva a definir algebraicamente, sólo conociendo los números naturales, al conjunto de los enteros como $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$, donde si n es un número natural, definimos $+n = [n, 0]$ y $-n = [0, n]$. Note que las operaciones y la relación de orden definidas son compatibles con las que conocemos usualmente para $\mathbb{Z}$.