Problemas Examen # 6

Polinomios y Complejos

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

04/07/2011

P1. (i) En $\mathbb{Z}_{10}$, definimos el subconjunto $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$, muestre que este conjunto con la operación producto de clases (producto en $\mathbb{Z}_{10}$) es un grupo abeliano.

(ii) Sea $(G, \cdot)$ un grupo tal que $a^2 = 1_G$, $b^2 = 1_G$ y $(ab)^2 = 1_G$. Muestre que $ab = ba$.

P2. Una matriz 2×2, es un arreglo de números reales de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. M_2 es el conjunto de tales matrices. En M_2, se define la suma y producto por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que $(M_2, +)$ es grupo abeliano.

b) Se define el determinante de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como el número real $\Delta = ad - bc$. Muestre que el conjunto de todas las matrices 2×2 con determinante distinto de cero, forman un grupo no-abeliano, con la operación multiplicación. ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ parece un buen candidato a elemento neutro y $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, parece un buen candidato a inverso de A.