Problemas Examen # 3

Inducción y Grupos

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

01/07/2011

P1. Supongamos que Ud. recibe una carta de una cadena, con la lista de los nombres y direcciones de 6 personas. La carta le pide que envie $1000 a la persona que encabeza la lista.
Además, Ud. debe hacer una nueva carta casi idéntica a la recibida, los únicos cambios son suprimir en la lista de nombres el primero de ellos y agregar al final de la lista el nombre suyo al final. Esta carta reformada tiene que enviarla a cinco amigos suyos. La carta original promete a Ud. que recibira dentro de pocas semanas la cantidad de $15.625.000.
Aunque estas cadenas nunca funcionan Ud. podrá encontrar entretenido verificar si la promesa de la carta original es correcta, bajo el supuesto que Ud. y todos los receptores de las cartas siguieran las instrucciones, es decir, no rompieran la cadena.
Podemos llamar c_k a la cantidad de cartas en el eslabón k, siendo la carta que Ud. recibió el eslabón 0, es decir, $c_0 = 1$, las cartas que Ud. envia corresponden al primer eslabón, así $c_1 = 5$, la cantidad de cartas enviadas por sus amigos es c_2

- ¿Cuál es la relación entre c_k y c_{k+1}?.
- Verifique por inducción que $c_k = 5^k$:
- De qué eslabón son los receptores de cartas que deberán enviar a Ud. $1000 cada uno?.

P2. Sea $(G, \cdot)$ grupo.

a) Llamamos el *centro* de G a

$$Z(G) = \{z \in G : \ x \cdot z = z \cdot x \text{ para todo } x \in G\}$$

Demuestre que $Z(G)$ es subgrupo de G

b) Dado $a \in G$, llamamos el *centralizador* de a en G a

$$C(a) = \{x \ \in G : \ a \cdot x = x \cdot a\}$$

Demuestre que $a \in Z(G)$ sí y sólo si $C(a) = G$.