

## Enunciado Auxiliar # 12

### Complejos

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.  
27/05/2011

**P1.** Discuta si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique.

(1)  $i^{2011} = i$ .

(2) Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $\text{Im}(\alpha z + \beta) = \alpha \text{Im}(z) + \beta$ .

(3) Sea  $z = a + ib = re^{i\theta}$  entonces siempre  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

(4)  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

(5) Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  entonces  $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$

(6)  $(\cos \theta + i \text{sen } \theta)^n = \cos n\theta + i \text{sen } n\theta$

(7) Sea  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . La ecuación  $z^n = w$  siempre tiene solución en  $\mathbb{C}$

(8) Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  par, entonces la ecuación  $z^n = -1$  tiene  $\frac{n}{2}$  pares de soluciones complejas conjugadas.

**P2.** (Control 3 1997) Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N} (1 - i)^n + (1 + i)^n \in \mathbb{R}$

**P3.** (Examen 2007) Calcule

$$S = 1 + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{(i+1)^2} + \dots + \frac{1}{(i+1)^n}$$

y escriba la solución de la forma  $a + ib$

**P4.** (Control 7 2009) Demuestre que las soluciones de la ecuación  $x^2 + x + 1 = 0$  son raíces cúbicas de la unidad

**P5.** (Contro Recuperativo 2002) Sea  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tales que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} = 0$$

Sea  $z \in \mathbb{C}$  arbitrario.

(i) Demuestre que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} (z_k - z) = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

(ii) Demuestre que

$$\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - z|$$