Enunciado Auxiliar Extra C5

Estructuras Algebraicas

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

02/06/2011

P1. (Control 5 - 2007) Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$$

Se pide:

(a) Estudiar la conmutatividad de $*$ en $\mathbb{R}^2$.

(b) Estudiar la asociatividad de $*$ en $\mathbb{R}^2$.

(c) Determine el neutro en $\mathbb{R}^2$ para $*$.

(d) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

(e) Determine los elementos idempotentes para $*$ en $\mathbb{R}^2$.

P2. (Control Recuperativo 1996)

(a) Sea $(G,*)$ es un grupo que verifica la propiedad $\forall a,b \in G$, $(a*b)^2 = a^2 * b^2$. Probar que $(G,*)$ es un grupo Abeliano.

(b) Sea $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax+b\}$ y $\overline{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R}, f(x) = x+b\}$. Sabiendo $(G,\circ)$ es un grupo, probar $(\overline{G},\circ)$ es un subgrupo de $(G,\circ)$.

P3. (Control 5 - 2009) Sea $(G,*)$ un grupo finito de orden 4, es decir, $|G| = 4$, con neutro $e \in G$. Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}, a^3 \neq e \ \left(e^3 = e*e*e\right)$
Indicación: Argumente por contradicción y use el Teorema de Lagrange.

P4. (Control 5 - 2008) Se define en $\mathbb{R}$ la l.c.i $*$ por $x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. se pide:

(a) Probar que $(\mathbb{R},*,\cdot)$ es un cuerpo.
Indicación: $\cdot$ es el producto habitual en $\mathbb{R}$ y puede usar todas las propiedades conocidas para $\cdot$

(b) Demuestre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R},*,\cdot)$ en $(\mathbb{R},+,\cdot)$

P5. (a) (Contro Recuperativo 2002) Sea $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = 0$$

Sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario.

(i) Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}(z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

(ii) Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$$

(b) (Control 6 - 2008) Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por $f(z_1,z_2) = |z_1+z_2|$. Pruebe que, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$f(z_1,z_2) \cdot f(\overline{z_1},\overline{z_2}) \leq (|z_1|+|z_2|)^2$$