Enunciado Auxiliar Extra Control Recuperativo

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

16/05/2011

P1. (Control 1 - 2007/2) Sean $p_1, p_2, \ldots, p_6$ proposiciones lógicas. Si la proposición

$$(p_1 \veebar p_2) \Longrightarrow (p_3 \Longrightarrow p_4) \qquad \text{es falsa}$$

Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a.1) $(p_5 \Longrightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2)$

a.2) $[(p_5 \Longrightarrow p_6) \vee \overline{p}_1] \Longrightarrow (p_4 \Longrightarrow p_3)$

a.3) $\overline{[(p_6 \vee p_5) \vee (p_1 \wedge p_2)]} \Longleftrightarrow (p_4 \Longleftrightarrow p_3)$

P2. (Control 1 - 2010) Sea U el conjunto universo. Considere dos conjuntos fijos $A, B \subseteq U$ con $A \neq \phi$. Para cualquier conjunto $X \subseteq U$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X \backslash B \text{ si } A \cap X \neq \phi \\ X \cup B \text{ si } A \cap X = \phi \end{cases}$$

a) Pruebe que $C(B) \in \{\phi, B\}$.

b) Pruebe que $C(A) = A \backslash B$ y $C(A^c) = (C(A))^c$.

c) Pruebe que si $(X \cap Y) \cap A \neq \phi \Rightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$.

P3. (Examen 2010) Calcule las siguientes sumatorias

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (k+1) \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \; ; \; S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k 2^k}{(k+2)!}$$

P4. (Control Recuperativo 1998) Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$. Para ello estudie previamente las sumas $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$

P5. (Examen 2008) Considere $p \neq 1$ un número natural impar fijo. Demuestre usando inducción que:

$$p^{2^n} - 1 \text{ es divisible por } 2^{n+2} \qquad \forall n \geq 1$$

Indicación: Puede serle útil usar que $p^{2^{n+1}} = (p^{2^n})^2$

P6. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calcule el valor de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i a^i$. Para ello escriba la suma anterior como una sumatoria doble y use la fórmula conocida de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

P7. *(P3, C1, 2004)* Sea $E \neq \emptyset$ y $f : E \to E$ una función. Demuestre que:

(i) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ $f \circ f$ es biyectiva.

(ii) $\forall A \subseteq E, \quad f(A) = A \Rightarrow f = id_E$
(Hint: Use un conjunto A adecuado).

(iii) Si $E = \mathbb{N}$, entonces:
$(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N})[n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)] \Rightarrow f$ es inyectiva

(iv) Si $E = \mathbb{N}$ y f satusface (iii), construya una función que demuestre que f no es necesariamente sobreyectiva (epiyectiva).

P8. (P2, C2, 1996)

(i) Sea $f : E \to F$ una funcíon. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$. Probar que si A y B son subconjuntos estables de E, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.

(ii) Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to B |\ f \text{ es función}\}$, es decir, es el conjunto que contiene a todas las funciones de A en B. Sea R una relación de orden en B. Se define en $\mathcal{F}$ la relación R^* por:

$$fR^*g \Leftrightarrow \forall a \in A, f(a)Rg(a)$$

Probar que R^* es una relación de orden en $\mathcal{F}$. Probar que si A y B tienen al menos 2 elementos, entonces R^* es una relación de orden parcial.

P9. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 c + 3d$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$ y que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

P10. (P3, C2, 2001) Sea E un conjunto no vacío. Considere la relación sobre $P(E)$ definida por:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists f : E \to E \text{ biyectiva}, \quad f(A) = B$$

(i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(ii) Pruebe que $[A]_{\mathcal{R}} = \{B \in P(E) : |B| = |A|, \ |E \backslash B| = |E \backslash A|\}$

(iii) Sea $E = \mathbb{Z}$ y $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Z}$ el conjunto de los números pares. ¿Es cierto que $(\mathbb{Z} \backslash \{0\})\mathcal{R}\mathcal{P}$? Justifique su respuesta.

P11. (P2, C3, 1999)

(i) Considere la relación de orden $\mathcal{R}$ definida sobre el conjunto E. Definimos una nueva relación $\mathcal{R}^*$ en $E \times E$ por:

$$(a, b)\mathcal{R}^*(c, d) \Leftrightarrow (a \neq c \wedge a\mathcal{R}c) \vee (a = c \wedge b\mathcal{R}d)$$

Pruebe que $\mathcal{R}^*$ es una relación de orden.

(ii) Sea B un conjunto infinito numerable y $\preceq$ una relación de orden total definida en B. Pruebe que dado $a \in B$, uno de los dos conjuntos siguientes es infinito numerable:

$$B_1 = \{b \in B | b \preceq a\}, \quad B_2 = \{b \in B | a \preceq b\}$$

P12. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional , es decir $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$.
Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q) donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable.