Enunciado Auxiliar # 7
Sumatorias Múltiples y Cardinalidad
Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.
06/05/2011

P1. (Control Recuperativo, 2009) Considere la suma:

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+\dots+n}{n}$$

Con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Escriba S como sumatoria doble y calcule su valor.

P2. Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{4n-2k} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{4n-2k}{j} a^j = [(a+1)^2 - 1]^{2n}$$

P3. (Control 4, 2008) Sean $i, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq k \leq i \leq n$. Pruebe que

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i} \binom{i}{k}$$

y utilícelo para demostrar que

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n$$

P4. (Control 4, 2009) Considere el conjunto

$$C = \{\dots, -16, -9, -4, -1, 1, 4, 9, 16, \dots\},$$

es decir, C es el conjunto de todos los cuadrados de números naturales y sus opuestos. Demuestre que C es infinito numerable.

P5. (Control 3, 1995) Muestre que el conjunto

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\}$$

es infinito numerable.

P6. (Control 1, 1992) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto

$$A = \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$$

Demuestre que A es infinito numerable.

P7. (Control 2, 2001) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene la función $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ además $f_1 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \{f_n(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que si A es infinito numerable, entonces B es infinito numerable.