Pauta Auxiliar Extra C3

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.
21/04/2011

P2. (Control 1, 1990) Sea el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los naturales. Se define $\forall X, Y \in \mathbb{N}^n$

$$X\mathcal{R}_1Y \iff x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Donde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x_i, y_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = 1, 2, \ldots n$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}_1$ es de orden parcial.

(b) Sea $\mathcal{R}_2$ la relación de orden usual entre n-tuplas:

$$\forall X, Y \in \mathbb{N}^n, \quad X\mathcal{R}_2Y \iff x_i \leq y_i\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demuestre que $X\mathcal{R}_2Y \implies X\mathcal{R}_1Y$. Verifique que la implicancia en el otro sentido es falsa (de un contraejemplo).

Solución: (a) Demuestre que si $\mathcal{R}_1$ es de orden parcial.
Para probar $\mathcal{R}_1$ de orden, necesitamos probar que es refleja, transitiva y antisimétrica. En efecto;

<u>$\mathcal{R}_1$ Refleja:</u>

$$X\mathcal{R}_1X \iff x_1 \leq x_1,\ x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Explicando un poco lo anterior, al evaluar la relación $X\mathcal{R}_1X$ tenemos que ambas n-tuplas tienen todas sus componentes iguales, en consecuencia ambas n-tuplas estarán relacionadas ya que sus componentes también serán menores o iguales a la de la otra n-tupla.

<u>$\mathcal{R}_1$ Transitiva:</u>

$$X\mathcal{R}_1Y \wedge Y\mathcal{R}_1Z \implies X\mathcal{R}_1Z$$

De aquí obtenemos dos informaciones :

$$X\mathcal{R}_1Y \iff x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$Y\mathcal{R}_1Z \iff y_1 \leq z_1,\ y_1 + y_2 \leq z_1 + z_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Veamos que por ejemplo para $n = 2$ sabemos tanto que $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ y que $y_1 + y_2 \leq z_1 + z_2$, luego $x_1 + y_2 \leq z_1 + z_2$ debido a la transitividad de $\leq$.
Generalizando, tenemos que $\forall i = 1, 2, \ldots n$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} z_i \implies \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} z_i$$

, se concluye que $X\mathcal{R}_1Z$.

$\mathcal{R}_1$ Antisimétrica:

$$X\mathcal{R}_1Y \wedge Y\mathcal{R}_1X \Longrightarrow X = Y$$

De igual forma que lo anterior, aquí sabemos que

$$X\mathcal{R}_1Y \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$Y\mathcal{R}_1X \Longleftrightarrow y_1 \leq x_1,\ y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

De forma parecida a la anterior, tenemos que $\forall i = 1, 2, \ldots n$ se cumple tanto que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$ como que $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$, de la antisimetría de $\leq$ concluimos que $\forall i = 1, 2, \ldots n$ se cumple $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$, lo que implica necesariamente $\forall i = 1, 2, \ldots n$ se tendrá $x_i = y_i$. Finalmente $\mathcal{R}_1$ antisimétrica y de orden.

Para verificar que $\mathcal{R}_1$ es de orden parcial, tenemos que encontrar dos elementos que no sean comparables entre ellos. Por ejemplo, los pares (0,20) y (5,10) no están relacionados, sólo basta notar que $(0, 20)\mathcal{R}_1(5, 10)$ es falso ya que si se cumple que $0 \leq 5$, pero no se cumple que $0 + 20 \leq 5 + 10$. En el otro sentido $(5, 10)\mathcal{R}_1(0, 20)$ también es falso debido a que $5 \leq 0$.

(b) Sea $\mathcal{R}_2$ la relación de orden usual entre n-tuplas:

$$\forall X, Y \in \mathbb{N}^n, \quad X\mathcal{R}_2Y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demuestre que $X\mathcal{R}_2Y \Longrightarrow X\mathcal{R}_1Y$. Verifique que la implicancia en el otro sentido es falsa (de un contraejemplo).

Considerando que $X\mathcal{R}_2Y$ se tendrá que la coordenada de X siempre será menor que la misma coordenada en Y, es decir, será directo que la suma de todas las componentes de X será menor que la suma de las coordenadas en Y (ej: $(x_1, x_2)\mathcal{R}_2(y_1, y_2) \Rightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 \Rightarrow (x_1, x_2)\mathcal{R}_1(y_1, y_2)$). Formalmente $\forall i = 1, 2, \ldots n$:

$$X\mathcal{R}_2Y \Longrightarrow x_i \leq y_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \Longrightarrow X\mathcal{R}_1Y$$

La implicancia en el otro sentido es falsa, basta tomar por ejemplo $(5, 10)$ y $(8, 8)$, que si cumplen $\mathcal{R}_1$ pero no $\mathcal{R}_2$

P3. La sucesión de Fibonacci se define $\forall n \geq 2$ como

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Demuestre mediante inducción que $\forall n$:

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

Solución: (i) Caso Base $(n = 0)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} F_i^2 = F_0 F_1 = 0$

Hipótesis de Inducción: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ $(\star)$

Por Demostrar Que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} F_{n+2}$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 \\
&= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \ (\star) \\
&= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1} F_{n+2}
\end{aligned}$$

Propuestos:

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$

P4. (Control 3, 1994) En este problema se demostrará por inducción que en un tablero de ajedrez de $2^n \times 2^n$ casilleros, con $n \geq 2$, a lo más se pueden colocar 2^{2n-1} caballos sin que se coman. Suponga que la propiedad se cumple para $n = 2$, es decir que en un tablero de $2^2 \times 2^2 = 16$ casilleros se pueden colocar a lo más $2^{2\cdot 2-1} = 8$ caballos sin que se coman (no lo demuestre).

(i) Demuestre que si la propiedad es cierta para $n = 2$ también lo es para $n = 3$. Para ello razone por contradicción dividiendo el tablero de $2^3 \times 2^3$ casilleros en cuatro tableros iguales y pruebe que si se pueden colocar más de $2^{2\cdot 3-1} = 32$ caballos en el tablero completo, entonces uno de los 4 tableros pequeños quedaría con más de 8 caballos.

(ii) Demuestre que la propiedad es válida para un n cualquiera con $n \geq 2$, también lo es para $n + 1$.

Solución: **Previo:** La demostraciones por contradicción siguen el siguiente razonamiento: si queremos demostrar que algo es verdadero se tendrá $(p \implies q) \iff V$, es decir $\overline{(p \implies q)} \iff F$ o equivalente $\overline{(\overline{p} \vee q)} \iff (p \wedge \overline{q}) \iff F$. O sea, a partir de suponer que se cumple nuestra hipótesis y que no se cumple la tesis llegaremos a una contradicción que nos demostrará el problema. En particular, en inducción tenemos que $p(n) \implies p(n+1)$ es verdad, luego podemos demostrar equivalentemente que $p(n) \wedge \overline{p(n+1)}$ es falso.

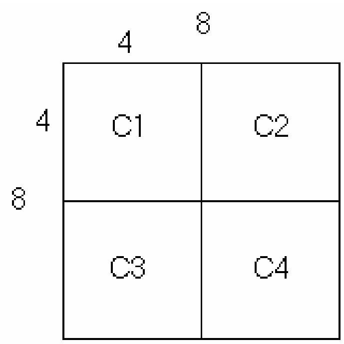

Figura 1: Tablero 8×8

(i) Tenemos que demostrar que $p(2) \implies p(3)$, usando contradicción (ie. $p(2) \wedge \overline{p(3)}$ es falso). Supongamos que existen más de $2^{2\cdot 3-1} = 32$ caballos en todo el tablero de 8×8 (notar que esta idea es $\overline{p(3)}$). Sean C_1,C_2,C_3,C_4 las cantidades de caballos en las 4 divisiones iguales del tablero, luego $C_1+C_2+C_3+C_4 > 32$. Ahora, notemos que cada división del tablero es de 4×4 casilleros, por lo tanto la cantidad máxima de caballos que puede haber en cada cuarto es sólo de $2^{2\cdot 2-1} = 8$ caballos (ya que sabemos que para $n = 2$ la proposición es cierta). Luego, la mayor cantidad de caballos que puede haber en todo el tablero es de $4 \cdot 8$, es decir $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \leq 32$, lo cual contradice nuestro supuesto, equivalemente se deduce que al menos en uno de los 4 tableros hay más de 8 caballos.

(ii) Supongamos que en un tablero de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ casilleros tenemos más de $2^{2(n+1)-1} = 2^{2n+1}$ caballos. Si esto se cumple, necesariamente al dividir el tablero en 4 cuadros iguales de $2^n \times 2^n$, en alguno habrá más de $\frac{1}{4} \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n+1-2} = 2^{2n-1}$ caballos, lo que contradice el hecho de la proposición es valida para n.

P5. Probar por inducción que para $n \geq 1$, $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 .

Solución: Caso Base ($n = 2$): $2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 5^2 - 5 = 168$ es divisible por 24 .

H.I.: $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 ($\star$).

PDQ: $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ es divisible por 24 .

En efecto:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 7 \cdot (2 \cdot 7^n) + 5 \cdot (3 \cdot 5^n) - 5 \\ &= 7 \cdot (2 \cdot 7^n) + 7 \cdot (3 \cdot 5^n) - 35 + 30 - 2 \cdot (3 \cdot 5^n) \\ &= 7\underbrace{(2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5)}_{24k} - 6 \cdot \underbrace{(5^n - 5)}_{4p} \ (\star) \\ &= 24(7k - p) \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión es divisible por 24.

Nota 1: También hay que justificar el hecho que para $n \geq 2$ la expresión $5^n - 5$ es siempre divisible por 4, para esto se puede proceder por inducción. Sin embargo es más fácil verlo de esta forma: para cualquier $n \geq 2$, 5^n siempre terminará 25 , de modo que $5^n - 5$ siempre terminará en 20 . Finalmente como la regla de divisibilidad de 4 dice que todo número que tiene sus dos últimos dígitos divisible por 4 es divisible por 4, se concluye que $5^n - 5 = 4p$ con $p \in \mathbb{N}$.

Nota 2: En general, los problemas de divisibilidad mediante inducción se resuelven de la misma forma. Ejemplo "$n \geq 2$, $5^n - 5$ es divisible por 4"después de escribir el caso base, la hipótesis de inducción y lo que hay que demostrar, se toma el caso $n+1$ y deben escribirlo de la siguiente forma: $\underbrace{5^{n+1} - 5}_{\text{caso } n+1} = \underbrace{\alpha(5^n - 5)}_{\text{de forma } 4k \text{ por HI}} + \beta$. Por lo general β será inmediatamente un número divisible por 4 (en este ejemplo será 20) .De no ser así, será como el problema recién resuelto y se deberá hacer un análisis a la expresión o proceder nuevamente por inducción.