Enunciado Auxiliar Extra C3

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

21/04/2011

P1. (Control 3, 2007) Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se define la relación $\mathcal{R}^*$ en $A \times A$ por:

$$(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a') \wedge (b\mathcal{R}b')$$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de orden, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(b) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es sólo un orden parcial.

(c) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(d) Para $(a,b) \in A \times A$, demuestre que:

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}$$

P2. (Control 1, 1990) Sea el conjunto $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ de n-tuplas con componentes en los naturales. Se define $\forall X, Y \in \mathbb{N}^n$

$$X\mathcal{R}_1Y \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Donde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x_i, y_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = 1, 2, \ldots n$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}_1$ es de orden parcial.

(b) Sea $\mathcal{R}_2$ la relación de orden usual entre n-tuplas:

$$\forall X, Y \in \mathbb{N}^n, \quad X\mathcal{R}_2Y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demuestre que $X\mathcal{R}_2Y \Longrightarrow X\mathcal{R}_1Y$. Verifique que la implicancia en el otro sentido es falsa (de un contraejemplo).

P3. La sucesión de Fibonacci se define $\forall n \geq 2$ como

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Demuestre mediante inducción que $\forall n$:

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}$

(ii) $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

P4. (Control 3, 1994) En este problema se demostrará por inducción que en un tablero de ajedrez de $2^n \times 2^n$ casilleros, con $n \geq 2$, a lo más se pueden colocar 2^{2n-1} caballos sin que se coman. Suponga que la propiedad se cumple para $n = 2$, es decir que en un tablero de $2^2 \times 2^2 = 16$ casilleros se pueden colocar a lo más $2^{2\cdot 2-1} = 8$ caballos sin que se coman (no lo demuestre).

(i) Demuestre que si la propiedad es cierta para $n = 2$ también lo es para $n = 3$. Para ello razone por contradicción dividiendo el tablero de $2^3 \times 2^3$ casilleros en cuatro tableros iguales y pruebe que si se pueden colocar más de $2^{2\cdot 3-1} = 32$ caballos en el tablero completo, entonces uno de los 4 tableros pequeños quedaría con más de 8 caballos.

(ii) Demuestre que la propiedad es válida para un n cualquiera con $n \geq 2$, también lo es para $n + 1$.

P5. Probar por inducción que para $n \geq 1$, $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 .