Enunciado Auxiliar # 4

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.
15/04/2011

P1. (Control Recuperativo, 1996) Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{R}$ por

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 + y = y^2 + x$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

ii) Probar que la clase de equivalencia de un real a es $\{a, 1-a\}$.

P2. i) (Control 3, 2008) Se define la relacion $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff xy > 0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Calcule el conjunto cuociente $(\mathbb{R}\backslash\{0\})/\mathcal{R}$

ii) (Control 3, 2008) Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in \mathcal{P}(E)$ fijo con $K \neq \phi$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A\mathcal{R}_K B \iff B \cap K \subseteq A$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva

(b) Proponga un conjunto $K \in \mathcal{P}(E)$ de modo que $\mathcal{R}_K$ sea una relación de **orden**. Justifique.

P3. (Control 3, 2007) Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se define la relación $\mathcal{R}^*$ en $A \times A$ por:

$$(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a') \wedge (b\mathcal{R}b')$$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de orden, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(b) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es sólo un orden parcial.

(c) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(d) Para $(a,b) \in A \times A$, demuestre que:

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}$$

P4. (Control Recuperativo, 2008) Considere el conjunto $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{f es función}\}$. Se define en A la relación Ω por

$$f\Omega g \iff f(n) \leq g(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pruebe que Ω es una relación de orden y decida (justificando) si es de orden total o parcial.