MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Andrea Vidal Salazar.

Clase auxiliar 11
31/Mayo

P1. Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo, no necesariamente con unidad. Para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ se define:

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ veces}} & n > 0, \\ 0_A \in A & n = 0, \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ veces}} & n < 0. \end{cases}$$

Además, puede usar sin demostrar que $(\forall m, n \in \mathbb{Z})$ $(\forall a, b \in A)$:

$$\begin{aligned} (n+m)a &= na + ma \\ n(ma) &= nma \\ a(nb) &= nab \end{aligned}$$

Considere en $\mathbb{Z} \times A$ las leyes suma y producto definidas por:

$$\begin{aligned} (n,a) \oplus (m,b) &= (n+m,\, a+b) \\ (n,a) \odot (m,b) &= (nm,\, nb + ma + ab) \end{aligned}$$

(i) Demuestre que $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad.

(ii) Demuestre que las funciones

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{Z} \times A \\ a &\longmapsto f(a) = (0, a) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \times A \\ n &\longmapsto g(n) = (n, 0_A) \end{aligned}$$

son morfismos inyectivos de los anillos $(A,+,\cdot)$ y $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$, respectivamente.

(iii) Considere en lugar de $(A,+,\cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$. Muestre que el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero.

(iv) ¿Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ un cuerpo?

P2. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con las operaciones

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c,\ b\cdot d)$$

donde $+$ y $\cdot$ son la suma y multiplicación usual en $\mathbb{Z}_2$. Definimos también la operación

$$(a,b)*(c,d)=(a\cdot c+b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d).$$

Usando el hecho que $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ es un cuerpo pruebe que:

(i) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad. ¿Es un cuerpo?

(ii) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+,*)$ es un cuerpo.

(iii) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+,*)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$, es decir no existe un morfismo biyectivo entre ambas estructuras.