MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Andrea Vidal Salazar.

Clase auxiliar 09
10/mayo

P1. Sea $(S, *)$ estructura algebraica con neutro e y $*$ operación asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$, se define la operación Δ en S por:

$$(\forall x,\, y \in S) \quad x \Delta y = x * a * y$$

(a) Demuestre que Δ es l.c.i. asociativa.
(b) Determine si Δ tiene neutro, calculándolo en caso de existir.
(c) Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a con respecto a Δ.

P2. Sea $\mathcal{F} = \{f | f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la l.c.i. $*$ por

$$(f * g)(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j)g(n-j) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demuestre que $*$:

(a) es conmutativa.
(b) Posee elemento neutro, y encuéntrelo.
(c) Distribuye con respecto a $+$, donde $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$.

P3. Sea G un grupo[1] con neutro $e \in G$, y $\preceq$ una relación de orden sobre G tal que

$$(\forall x,\, y,\, z \in G) \quad (x \preceq y) \Rightarrow (x * z \preceq y * z)$$

Sean los conjuntos $G_+ = \{x \in G |\; e \preceq x\}$, $G_- = \{x \in G |\; x \preceq e\}$. Demuestre que

(a) $G_+ \cap G_- = \{e\}$.
(b) $(\forall x \in G)\ (x \in G_+ \Rightarrow x^{-1} \in G_-)$.
(c) $(G_+, *)$ es una estructura algebraica.
(d) Si la relación de orden $\preceq$ es total[2], entonces $G_+ \cup G_- = G$.
(e) Si $G_+ \cup G_- = G$, entonces la relación de orden $\preceq$ es total.

[1] Dada una estructura algebraica $(A, *)$, diremos que es grupo ssi la l.c.i. $*$ verifica:

- $*$ es asociativa.
- $*$ admite elemento neutro.
- Cada elemento de A tiene un inverso con respecto a $*$.

[2] una relación de orden $\mathcal{R}$ en un conjunto A se dice total cuando $(\forall x,\, y \in A)\ x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$