MA1101 - Introducción al Álgebra.

Mónica Carvajal, Sebastián Reyes Riffo, Andrea Vidal Salazar.

Cardinalidad

Dados A, B conjuntos no vacíos, diremos que tienen el **mismo cardinal** si $\exists f : A \longrightarrow B$ que sea biyectiva. En tal caso, $|A| = |B|$.
Si f es inyectiva, tendremos que $|A| \leq |B|$. Una consecuencia directa de lo anterior es

$$A \subset B \Longrightarrow |A| \leq |B|$$

Diremos que un conjunto es *numerable*, si y sólo si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$. En cambio, un conjunto A se dirá *infinito* si su cardinal no es finito ($|A| \geq |\mathbb{N}|$).

Algunas propiedades importantes:

- Sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces $A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.
- Sea $A_0, A_1, \ldots, A_n$ colección numerable de conjuntos, donde cada A_k es numerable. Entonces su unión $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ es numerable.
- Sea A un conjunto infinito, y $x \in A$. Se tiene que $|A| = |A \setminus \{x\}|$.

Métodos para demostrar numerabilidad de un conjunto A

1. **Encontrar una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y el conjunto A**

   Observación: Esta función también puede ir de cualquier conjunto numerable (como $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, etcétera) hasta A, ya que sabemos de la existencia de una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y un conjunto numerable. Luego por composición, se concluye.

   Ejemplo(P5a, Semana 8): Probar que el conjunto L de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional es numerable.
   Primero, veamos como es el conjunto L. Las rectas que pasan por $(0, 1)$ y $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ se caracterizan por ser de la forma:

   $$L_a : mx + n \qquad m = -\frac{1}{a}, n = 1$$

   por lo cual

   $$L = \left\{ L_a : -\frac{1}{a}x + 1 : a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}$$

   Ahora consideremos la función $f : L \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, definida por $f(L_a) = -\frac{1}{a}$, que es biyectiva. Con esto tenemos $|L| = |\mathbb{Q} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}|$, y se obtiene lo pedido.

2. **Encontrar una función inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ (en realidad, sirve cualquier conjunto numerable), y luego demostrar que A es infnito**.

   ¿Por qué? Como f es inyectiva, se tiene que $|A| \leq |\mathbb{N}|$. De la definición de conjunto infinito se tiene que $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Se concluye entonces $|A| = |\mathbb{N}|$.

3. **Unión numerable de conjuntos numerables.**

   Recomendado cuando en un conjunto hay más de una variable "moviéndose" y ambas pertenecen a conjuntos numerables, por ejemplo (P3, Semana 8):

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i} \right\}$$

   Lo que se hace frecuentemente es "fijar" uno de los índices, para así obtener una familia de conjuntos. En este caso, si fijamos el índice i:

$$A_i = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^i} \right\}$$

   Notemos que $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Ahora basta mostrar que A_i es numerable $\forall i \in \mathbb{N}$, pues sabemos que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. En efecto, A_i es numerable, pues basta considerar la biyección $f : A_i \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $f_i(x) = k$.

4. **Demostrar que A es infinito, y luego ver que A es subconjunto de un conjunto numerable.**

   La razón es la misma del método dos.