MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Andrea Vidal Salazar.

Clase auxiliar 06
26/abril

P5. (i) Pruebe sin usar inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(ii) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y definamos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Usando (i) e inducción, pruebe que

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_n.$$

Indicación: recuerde que si $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Sol.:

(i) notemos que

$$\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

reemplazando esta expresión en la sumatoria, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1}(-1)^2 = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k \\
&= \frac{-1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k - \binom{n+1}{0}(-1)^0\right] \\
&= \frac{-1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k 1^{n+1-k} - 1\right] \\
&= \frac{-1}{n+1}\left[(-1+1)^{n+1} - 1\right] = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

(ii) Usando inducción,
$\underline{n=1}$:

$$\sum_{k=1}^{1}\binom{1}{k}\frac{(-1)^k}{k} = \binom{1}{1}(-1) = -1 = -H_1$$

$\underline{n \Rightarrow n+1}$:

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{n+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea se uso la hipótesis de inducción (reemplazando el valor de H_n) y luego la parte (i).

La segunda sumatoria se puede expresar como

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= -\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{k} \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{k} - \binom{n}{n+1-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

usando esto en la expresión encontrada antes para H_{n+1}, se obtiene

$$\begin{aligned}H_{n+1} &= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

y se concluye. Notar que en la segunda línea se usó la indicación.