

MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01

Profesor: Jaime Ortega.

Auxiliares: Sebastián Reyes Rifo, Andrea Vidal Salazar.

Clase auxiliar 05

19/Abril

P5. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Calcule $\sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Sol.: Es claro que

$$f\left(1 + \frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{k+1}{k}\right) = f(k+1) + f\left(\frac{1}{k}\right)$$

De la propiedad, notamos

$$f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right) = f(1) \tag{1}$$

y además

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$$

por lo tanto, de lo anterior y (1) se obtiene: $f\left(\frac{1}{k}\right) = -f(k)$. Con esto, el cálculo de la sumatoria está dado por

$$\sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(1) = f(n+1)$$