

MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01**Profesor:** Jaime Ortega.**Auxiliares:** Sebastián Reyes Rizzo, Andrea Vidal Salazar.**Clase auxiliar 02****28/marzo****P1.** Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}) \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Probar que

$$(i) \quad f(0) = 0$$

$$(ii) \quad f(-m) = -f(m)$$

$$(iii) \quad f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow [x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0]$$

P2. Sea U el conjunto universo, y $A \subseteq U$ con $A \neq U$. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ X &\longmapsto f(X) = A \cap X \end{aligned}$$

P3. Considere las funciones $f, g : A \longrightarrow B$, con $A, B \neq \emptyset$ y f biyectiva. Se define para cada $x \in A$ la función

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow B \times B \\ x &\longmapsto \varphi(x) = (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Probar que φ es inyectiva.Indicación: recuerde que $(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow [(a \neq c) \vee (b \neq d)]$ **P4.** P2, Control 2 2010. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})f(x) = ax^2\}$. Se define la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi(f) = f(2) \end{aligned}$$

Demuestre que φ es biyectiva.**P5.** Sea E un conjunto fijo no vacío, y Ψ_A la función característica de A ($\forall A \subseteq E$). Definimos el conjunto de todas las funciones de E en $\{0, 1\}$, esto es

$$\mathcal{F} = \{f : E \longrightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ es función}\}$$

Además se define la función λ por

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F} \\ A &\longmapsto \lambda(A) = \Psi_A \end{aligned}$$

Demuestre que λ es biyectiva.