

MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01**Profesor:** Jaime Ortega.**Auxiliares:** Sebastián Reyes Rizzo, Andrea Vidal Salazar.**Clase auxiliar 13****14/Junio****P1.** Pruebe que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(1 + i \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n + \left(1 - i \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n = 2 \left(\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)$$

P2. Demostrar usando las propiedades de las raíces de la unidad que $\forall n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) &= -1 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) &= 0 \end{aligned}$$

P3. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ las raíces n -ésimas de la unidad.

(a) Verifique que $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_j^m = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ divide a } m, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

(b) Sea $m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio definido por

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

Demuestre que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0).$$

P4. Considere los números reales $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ y $R = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) Probar la igualdad de números complejos

$$S + iR = (1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n$$

(b) Escriba el número complejo $1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ en forma polar y deduzca que

$$S = 2^n (\cos(\alpha/2))^n \cdot \cos(n\alpha/2)$$

$$R = 2^n (\cos(\alpha/2))^n \cdot \sin(n\alpha/2)$$