MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Andrea Vidal Salazar.

Clase auxiliar 06
26/abril

P1. Determine el valor de las siguientes sumatorias:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Indicaciones:

(a) recuerde que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

(b) queda propuesto calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

P2. Usando el teorema del Binomio de Newton en la expresión $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$, pruebe (sin usar inducción) que

$$(\forall n \geq 1) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$$

P3. Sean p, q reales no negativos tales que $p+q=1$. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

Indicación: $k^2 = k(k-1) + k$.

P4. (i) Considere la progresión aritmética $(a_i)_{i\geq 0}$. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{n}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_n}}$$

(ii) Para la progresión geométrica $(b_i)_{i\geq 0}$, demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{b_{k-1} b_k} = \frac{\sqrt[2n]{b_0 b_n}}{\sqrt[n]{b_0} - \sqrt[n]{b_n}} (b_0 - b_n)$$

P5. (i) Pruebe sin usar inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(ii) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y definamos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Usando (i) e inducción, pruebe que

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_n.$$

Indicación: recuerde que si $k \in \{1, \ldots, n\}$, *entonces* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.