

MA1101-1 - Introducción al Álgebra. Semestre 2011-01**Profesor:** Jaime Ortega.**Auxiliares:** Sebastián Reyes Rizzo, Andrea Vidal Salazar.**Clase auxiliar 04****12/abril****P1.** Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ como

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0.$$

Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia. Calcule el conjunto cociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$.**P2.** Sea E un conjunto no vacío, $K \in \mathcal{P}(E)$, $K \neq \emptyset$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por

$$A\mathcal{R}_KB \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A.$$

- (a) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
- (b) Proponga un conjunto $K \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\mathcal{R}_K$ sea relación de orden. Justifique.

P3. Sea A conjunto no vacío y $f : A \rightarrow A$ una función biyectiva, denotamos f^{-1} su inversa. Definimos

$$f^{(n)} = \begin{cases} f \circ f^{(n-1)} & n \geq 1 \\ id_A & n = 0 \\ (f^{-1})^{|n|} & n \leq -1 \end{cases}$$

Considere la relación $\mathcal{R}$ definida sobre A como

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad f^{(n)}(x) = y$$

- (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
- (b) Sea $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ fijo. Si $A = \mathbb{Q}$ y $f(q) = pq$, determine la clase de equivalencia de 0 y 1 con respecto a $\mathcal{R}$.

P4. Considere los conjuntos

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N} \mid f(i+1) - f(i) = 1\},$$

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\},$$

a continuación, se definen las relaciones

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}) \quad f(i) \leq g(i)$$

$$f \sim g \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) (\forall i \in \mathbb{N}) \quad f(i) - g(i) = k$$

Demuestre que:

- (a) $\sim$ es relación de equivalencia.
- (b) $(\forall f \in \mathcal{F}) (\exists g \in \mathcal{F}_0) \quad f \sim g$.
- (c) $(\exists h \in \mathcal{F}) (\forall f \in \mathcal{F}_0) \quad h \leq f$.
- (d) Dados $f, g \in \mathcal{F}_0$, $(\forall i \in \mathbb{N}) (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad f(i) - g(i) = 2k$.